# DIECI COSE CHE BISOGNA SAPERE SULLA MATEMATICA
# che quasi nessuno dice in pubblico

## 1) La matematica non è scienza.

La differenza principale tra la matematica e la scienza è nell'oggetto di cui si interessano. La scienza si occupa del mondo reale: dalla fisica, alla biologia, alla chimica, passando per la medicina e l'economia, lo scopo della scienza è quello di capire, predire o comunque descrivere qualcosa che accade. La matematica, invece, non si occupa del mondo reale. La matematica si occupa di astrazioni prodotte dalla mente umana: in natura non si trova niente che possa definirsi un punto, una linea retta, il numero cinque, la radice quadrata di 2 o uno spazio di Hilbert. La scienza tenta di comprendere la realtà costringendola entro i confini delle leggi matematiche. Dunque la scienza ha bisogno della matematica[(1)]. Al contrario, la matematica non ha bisogno della scienza. La maggior parte della matematica è stata prodotta molto prima che qualcuno trovasse delle applicazioni pratiche in cui utilizzarla. Parafrasando un celebre fisico[(2)], che la utilizzò per costruire la prima bomba atomica, della matematica possiamo dire che "come il sesso, ha un suo fine pratico, ma non è questo il motivo principale per cui vale la pena dedicarvi del tempo".

[(1)] Il fatto che oggi tutti parlino di scienza e quasi nessuno conosca la matematica dovrebbe mettere in guardia da ogni genere di "esperti": l'utilizzo di terminologia scientifica, in assenza di una spiegazione matematica accessibile, segnala persone a corto di argomenti nel tentativo di millantare autorevolezza.

[(2)] Robert Oppenheimer.

## 2) La matematica è dimostrazione.

Questo punto ricade sotto il precedente e ne specifica il contenuto: lo scienziato è interessato alla formula, il matematico alla dimostrazione. Un esempio può chiarire questo concetto: Galileo Galilei, il padre della scienza moderna, formulò la legge di caduta dei gravi, utilizzando la legge matematica per cui la somma dei primi $n$ numeri dispari consecutivi fornisce l'$n$-esimo numero quadrato. Unendo questa conoscenza ai risultati dei suoi esperimenti con il piano inclinato, si rese conto che lo spazio percorso da un corpo in caduta libera, quadruplica in un tempo doppio, diventa nove volte in un tempo triplo e, in generale, è proporzionale al quadrato del tempo trascorso dall'inizio della caduta. Tutto ciò è molto bello e, in definitiva, ha permesso all'uomo di volare e di arrivare sulla Luna. Il problema dei matematici, però, è un altro: perché se sommo i primi 2 numeri dispari ottengo 4 (2 al quadrato) e così avviene con i primi 3, 4 o 4000 numeri dispari? Qui non ci può aiutare alcun esperimento perché ce ne vorrebbero infiniti: ci serve un'argomentazione, ossia un numero finito di parole, per spiegare il comportamento di una infinità di oggetti (i numeri dispari e quelli quadrati), ammesso che si comportino davvero come crediamo noi. Non si può dire se questo sia un compito più o meno facile rispetto a quello di descrivere come cadono i corpi, ma si può dire che i matematici si interessano di questo problema e gli scienziati di quell'altro. Ciò non dovrebbe metterli in competizione gli uni con gli altri. Del resto, nulla vieta di interessarsi ad entrambe le cose.

## 3) Non esistono dimostrazioni scientifiche.

Quando parlano di dimostrazione, gli scienziati si riferiscono alle dimostrazioni matematiche perché sono le uniche dimostrazioni che esistono. Né Galileo, né Newton , né nessun altro ha mai dimostrato né può dimostrare che i corpi cadono verso il basso: si tratta solo di un'ipotesi assai ragionevole a quanto pare mai smentita fino a questo momento. Tutto quello che si può dimostrare riguarda concetti matematici astratti come i numeri, gli oggetti geometrici o le funzioni. Unendo queste dimostrazioni ai risultati di esperimenti, gli scienziati possono pronunciarsi sul mondo reale avanzando delle teorie, che è come dire delle ipotesi. Tutti quelli che parlano di "fatti dimostrati scientificamente" vanno invece annoverati tra gli imbroglioni o gli ignoranti (una cosa non escludendo l'altra).

## 4) La matematica è inutile.

Nel nostro mondo è vista con sospetto qualunque attività che non abbia un secondo fine, in genere coincidente con l'accrescimento del proprio potere o del proprio conto in banca.
D'altra parte, la reazione più tipica dell'accusato è mentire e i matematici non fanno eccezione. Quando li si accusa di dedicarsi ad un'oziosa attività intellettuale, essi reagiscono molto spesso tirando in ballo l'importanza della matematica per il progresso scientifico e tecnologico. Ciò serve ad ingraziarsi finanziatori piccoli (contribuenti) e grandi (imprenditori e politici), entrambi interessati alle opere di utilità sociale molto più che alla speculazione filosofica. È, insomma, una bugia dovuta al fatto che per poter dedicarsi alla matematica bisogna sopravvivere e non avere un reddito porta nella direzione sbagliata.
Quando parlano tra di loro, però, i matematici non hanno difficoltà ad ammettere la propria insensibilità all'esistenza di applicazioni pratiche di quello che fanno. Di fronte ad una nuova dimostrazione, poniamo del teorema di Pitagora, un matematico non presterà alcuna attenzione al fatto che questo teorema è già stato dimostrato in centinaia di modi diversi, ma seguirà l'argomentazione al solo fine di trarne piacere intellettuale. D'altra parte un altro fine sarebbe assai difficile da trovare: se la relazione tra i lati di un triangolo rettangolo ha qualche utilità per vari scopi pratici, non si può dire lo stesso del continuare a cercarne nuove dimostrazioni originali.
Tornando all'esempio di Galileo: sapere perché i numeri dispari e quelli quadrati si comportano a quel modo non aiuta a capire il moto di un corpo che cade. A Galileo e a tutti gli altri scienziati e ingegneri dopo di lui è stato sufficiente sapere che quel comportamento dei numeri effettivamente sussiste. I matematici, invece, sono interessati al perché di quel comportamento e ne cercano una spiegazione per il solo piacere di trovarla.

## 5) La matematica è una forma d'arte.

È la versione positiva dell'assunto precedente: un modo di dire la stessa cosa in maniera più gentile.
L'opera d'arte del matematico è la dimostrazione. Come le altre opere d'arte, le dimostrazioni hanno il solo fine di appagare chi è in grado di comprenderle. La differenza principale è che ad esse non si può riservare una fruizione "passiva" come quella consentita, ad esempio, da un quadro, una scultura o un'opera musicale. Ciò rende la matematica una forma d'arte poco "spendibile" nella nostra "società dei consumi": per questo non esiste un'industria matematica come quella discografica o turistica. Ciò nonostante, interrogarsi sull'utilità di un'opera matematica non è meno stupido di quanto sia farlo rispetto ad una canzone o a un affresco. In ciascun caso l'espressione "Ma a che serve?" andrebbe sostituita con un più onesto e sensato "Non capisco".

## 6) Ciò che si studia a scuola non è matematica.

Chiedete ad un matematico qualsiasi di risolvere per voi uno qualunque tra i più diffusi esercizi scolastici di matematica. Qualora il matematico dovesse decidere di accontentarvi, e non sarà facile, egli ricaverà dall'esercizio niente di più di quanto saprebbe fare l'ultimo degli studenti: un risultato uguale a quello del libro e una quantità di noia proporzionale alla lunghezza dell'esercizio. È come chiedere ad un pittore di annerire gli spazi numerati, senza poter nemmeno scegliere tra la matita e il pennello. La matematica scolastica equivale ad una lunghissima esposizione di tecniche per dipingere senza che l'allievo possa mai provare a realizzare un suo disegno. I quesiti sono ideati per applicare le tecniche spiegate nel libro ossia, per giustificare l'esistenza dello stesso. Gli oggetti della matematica, invece, pongono quesiti molto più interessanti senza indicazioni di metodi risolutivi e senza nemmeno offrire la certezza che ve ne sia alcuno. Scorgere questi interrogativi e provare a rispondere significa fare matematica, risolvere gli esercizi del libro significa fare i compiti. Per dedicarsi al primo tipo di attività è necessario farlo almeno una volta e poi lasciarsi prendere dalla curiosità. Per dedicarsi al secondo tipo di attività è necessario esserci costretti.

## 7) Per fare matematica non servono pre-requisiti. Serve un problema.

Il problema del matematico è trovare per ciascuna sua affermazione una dimostrazione, ossia una giustificazione in grado di fugare ogni dubbio. I problemi si dividono in due categorie: quelli già risolti e quelli ancora da risolvere o, che è lo stesso, in facili e difficili. I problemi facili vengono utilizzati per formulare problemi appartenenti alla seconda categoria. Le tecniche usate per operare questa trasformazione sono: indebolire l'ipotesi, rafforzare la tesi o scambiarle tra di loro. Le stesse tecniche, usate al contrario, consentono di passare da un problema difficile ad uno più facile. Un buon problema di partenza può così fornire materiale di indagine per tutta la vita.

## 8) Non bisogna essere un genio per fare matematica.

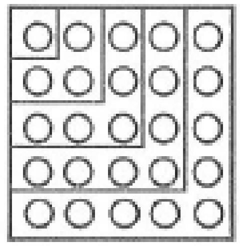
Proprio come la musica o la pittura, anche la matematica può essere apprezzata da comuni mortali che non passeranno alla storia per i propri contributi. E, proprio come per la musica o la pittura, dall'apprezzarla al crearne di propria il passo è più breve di quanto si creda generalmente. Non c'è bisogno di alcuna dote speciale ma di un problema a cui valga la pena dedicare del tempo. È possibile che un matematico esperto impieghi meno tempo di uno alle prime armi per risolvere lo stesso problema, ma l'arte non è una gara. È assai improbabile che un neofita risolva problemi che hanno resistito, talvolta per secoli, all'attacco di grandi matematici. Ma, seguendo il flusso del ragionamento, prima o poi da qualche parte si arriva. Quasi mai, anche per i geni, questa parte è quella che si voleva raggiungere all'inizio ma, in matematica, il percorso conta più del punto d'arrivo. Anche perché non ne esiste uno definitivo.

## 9) La matematica è l'attività intellettuale con il maggior grado di libertà possibile.

O, per i pessimisti: una libertà assoluta è impossibile, per colpa della matematica. Il nostro pensiero, libero da tutte le costrizioni che il mondo esteriore ci impone, non può liberarsi della matematica. Le astrazioni prodotte dalla nostra mente, prima di obbedire a noi, obbediscono alla matematica e non possiamo fare niente per sottrarci alle sue regole. Quando pensiamo ad una festa possiamo immaginare e augurarci la nascita di nuovi amori, ma il limite al numero di queste possibilità è fornito dalla matematica: se i partecipanti sono 7, ad esempio, non possono nascerne più di 21. Non dipende da come la pensiamo, da chi ci piace o da quanta immaginazione abbiamo, ma dal comportamento di 7 (numero dei partecipanti) e 2 (numero di persone coinvolte in quello che chiamiamo "rapporto d'amore"). Tutte le altre limitazioni dipendono da pregiudizi (tipo quella sulle unioni omosessuali), opinioni (del tipo "Maria è troppo bella per Salvatore") e desideri ("Voglio Anna"), ma al numero 21 non si scappa. È il motivo per cui Stendhal diceva di essere attratto alla matematica dal suo odio per l'ipocrisia: non si può avere tutto, ma tutto quello che abbiamo è il prodotto delle nostre scelte.

## 10) In matematica esiste il gusto, dunque le opinioni.

Come tutte le altre opere d'arte la dimostrazione è soggetta ad una valutazione estetica, per sua natura soggettiva e variabile nel tempo. A me, ad esempio, piace molto la seguente dimostrazione del risultato citato precedentemente sulla somma di numeri dispari consecutivi a partire da 1.



Guardando questa immagine si realizza perché tale somma deve coincidere con un numero quadrato. La spiegazione soddisfa almeno due dei miei criteri di eleganza preferiti: usare meno parole possibile (zero in questo caso) e raggiungere il massimo numero di persone, ossia dare per scontato il meno possibile. La stessa proprietà dei numeri dispari avrebbe potuto spiegarsi in molti altri modi, uno dei quali è il seguente.

Data una sequenza di numeri dispari consecutivi dal primo (cioè 1) all'$n$-esimo (cioè $2n - 1$), la somma del primo con l'ultimo, del secondo (3) con il penultimo ($2n - 3$), e così via (fino alla coppia ultimo-primo) è costantemente uguale a $2n$. Sommando queste $n$ coppie di addendi si ha dunque un risultato pari a $2n \times n = 2n^2$. Ma questo non è altro che il doppio della somma che volevamo eseguire che, pertanto, vale $n^2$.

Questa dimostrazione è peggiore della precedente se si giudica in base ai criteri di economia delle parole (sono poche ma non così poche come le zero di prima) e fruibilità della spiegazione (presupponendo quest'ultima un minimo di dimestichezza con il calcolo letterale) ma non sono questi gli unici criteri in base ai quali è possibile giudicare. Un altro criterio, ad esempio, è quello della capacità della dimostrazione di adattarsi a contesti più generali. Se usiamo questo come metro di giudizio, la seconda dimostrazione batte la prima: l'osservazione sulla costanza delle somme antipodali (primo ed ultimo, secondo e penultimo, ecc.) consente di dimostrare un risultato analogo valido per qualunque sequenza in cui la differenza tra numeri consecutivi è costante (tali sequenze si chiamano **progressioni aritmetiche**).
Come accade agli altri artisti, anche i matematici hanno gusti ed interessi diversi: un matematico che ami o sia interessato, per qualche ragione, ai numeri quadrati preferirà, probabilmente la prima dimostrazione; uno interessato alle progressioni aritmetiche, probabilmente, preferirà la seconda. Qualcun altro non sarà in grado di scegliere e quasi tutti, tra varie dimostrazioni dello stesso risultato, finiranno per preferire quella che hanno ideato essi stessi.