IL TRIS
E ALTRA MATEMATICA INUTILE

INDICE

ALTRI GIOCHI

SOMMA 15
TRIS DI MARIO
TRIS DI MARTA
TRIS DI OSCAR
TRIS A PERDERE
TRIS MOBILE
TRIS 3D

ALT(R)A MATEMATICA

ARITMETICA
ALGEBRA
GEOMETRIA

Per info: associazionecasamatta@yahoo.it

PREFAZIONE

Questo libretto è stato realizzato assemblando il materiale e i ricordi di tre laboratori distinti che ho realizzato quest'anno: due con bambini di terza elementare, delle scuole "Luigi Perna" di Avellino ed "Enea Zanfagna" di Napoli, e un terzo tra adulti, membri dell'associazione culturale Casamatta. Purtroppo, l'idea del libretto è successiva allo svolgimento dei laboratori nelle scuole, per cui molti contributi dei bambini sono filtrati dalla mia memoria, dal mio gusto personale e dalla mia maniera di esporre. D'altra parte, anche i contributi degli adulti (Laura e Marta) hanno subito un trattamento analogo. Per questo la responsabilità di inesattezze, omissioni e scelte poco felici è soltanto mia, anche se il testo è un'elaborazione collettiva di Casamatta.

L'ultimo capitolo, pur ispirato alle domande emerse durante i laboratori, è un mio tentativo di ricollegare queste domande alle questioni considerate "specialistiche" e vuole essere sia un invito alla matematica che un piccolo contributo all'abbattimento degli specialismi.

Non volevamo realizzare un resoconto di quanto avvenuto nei tre laboratori ma, piuttosto, offrire uno strumento a chi è incuriosito dalle nostre attività.

Sperimentiamo e proponiamo laboratori ai nostri "pari" più o meno come facciamo con bambini e ragazzi. A me, ad esempio, piace la matematica e trovo più o meno la stessa difficoltà (ossia l'altrui disinteresse) quando cerco di parlarne con uno scolaro, un universitario o un passante. La mia esperienza dice che i più interessati sono i bambini di terza elementare e i meno interessati sono i laureati, ma cerco di non farmi influenzare da questa statistica personale e... ci provo con tutti. Chissà mai che non mi riesca proprio con te.

Rocco De Luca

LA MATEMATICA

CHE COS'È LA MATEMATICA?

Amandolasemplicità,imatematicipreferisconooccuparsidialtriproblemi. Tuttavia, a furia di averci a che fare, molti matematici hanno aggiunto un pezzettodirispostaaquestadifficilissimadomanda.Tutticontengonoun po' di verità. La matematica è....

un linguaggio
J.W. Gibbs

lascienzachetraeconclusioninecessarie
B. Peirce

l'arte della spiegazione
P. Lockhart

la scienza che usa parole facili per idee difficili
E.Kasner & J.R.Newman

l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse
J.H. Poincaré

è come essere Dio in un certo senso. Puoi creare mondi e studiarli: è una combinazione della bellezza, dell'immaginazione e della libertà
A. Shalev

la classe di tutte le proposizioni della forma "p implica q"
B. Russell

quella parte della scienza che potresti continuare a costruire anche se domattina, svegliandoti, scopri che l'universo non c'è più
D. RUSIN

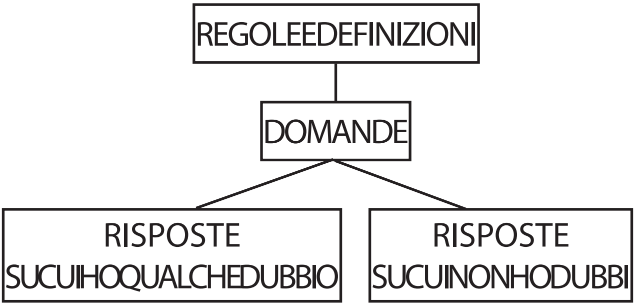
A CHE SERVE? A NIENTE.

Questo libretto è stato realizzato da molti bambini e alcuni adulti. Sia i bambini che gli adulti avevano già incontrato la matematica come materia scolastica (e ovviamente gli adulti ne avevano studiata molta di più), ma né grandi né piccini conoscevano la vera matematica, "quella che fanno i matematici".
La matematica dei matematici è diversa da quella che si insegna a scuola. A scuola si impara una matematica che, così dicono, sarà utile in futuro: per capire la scienza e la tecnologia, per superare esami e imparare un mestiere, per essere al passo con i tempi e non fare brutte figure in giro. Ai matematici tutto questo non interessa. Almeno, non quando fanno matematica. Il mondo reale è troppo complicato per i gusti dei matematici che preferiscono mondi immaginari, in cui le regole sono poche, semplici e, soprattutto, scelte da loro stessi.

SEMPLICE È BELLO

Per scrivere questo libretto abbiamo giocato a tris, abbiamo provato a spiegare il gioco ad un marziano, sforzandoci di immaginare qualcuno che non conosce niente di questo gioco, abbiamo scoperto cosa conosciamo noi, cosa sappiamo con sicurezza, cosa ci lascia qualche dubbio e cosa ignoriamo completamente. Abbiamo cercato spiegazioni semplici e belle, per soddisfare le nostre curiosità e poi inventare nuovi problemi e nuovi giochi.

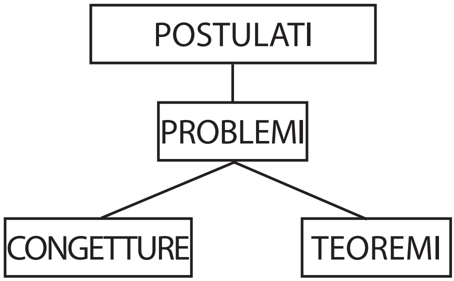
Puoi farlo anche tu, a partire dal tris o da un altro gioco, dalle nostre o da altre domande: basta pensare allo schema seguente.



Tutti pensano ad uno schema simile quando si avvicinano ad un gioco o a un problema. I matematici si distinguono dagli altri per le scelte che fanno e per il linguaggio che usano. Il matematico ricerca idee belle e, per lui, bellezza significa semplicità. Ama a tal punto la semplicità che vorrebbe scegliere le sue regole in modo che anche un marziano potrebbe capirle.

BADA A COME PARLI

Rispondendo ai dubbi di un immaginario marziano, o di un suo amico in carne ed ossa, il matematico sta rispondendo, in realtà, ai propri dubbi. Se le cose sono semplici come piace a lui, nessuno deve avanzare dubbi. Quando è riuscito ad esprimere le regole del gioco che gli piace nella forma più chiara possibile, si riferisce a queste regole chiamandole *postulati*. Se unaspiegazionegli sembraparticolarmentechiara, il matematicolachiama *dimostrazione* e chiama *teorema* ogni affermazione di cui possegga una dimostrazione. Se invece c'è qualche affermazione che egli "sospetta" vera anche se non ne ha ancora una dimostrazione, dice che l'affermazione è una *congettura*. Lo schema dei matematici è, quindi, il seguente.

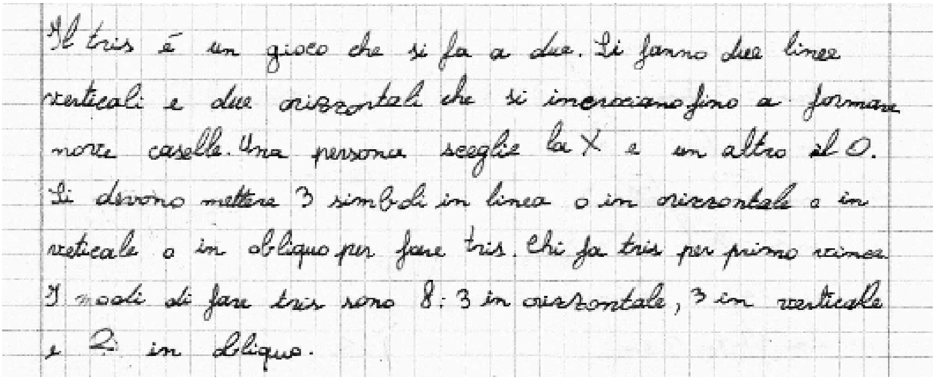


La vera differenza tra i matematici e gli altri, però, non è nell'utilizzo di questi termini strani: puoi diventare un matematico anche continuando a chiamare "regole" i postulati o "risposte su cui ho qualche dubbio" le congetture. La vera condizione per essere un matematico è accorgersi che lo schema non sarà mai completo: che ogni congettura ci sfida a trasformarla in un teorema; che ogni teorema suggerisce nuovi problemi e ogni problema nuovi postulati. Se inizi veramente a giocare, lo farai per tutta la vita.

IL TRIS

CHE COS'È IL TRIS?

Per il momento, la spiegazione più chiara che conosciamo di questo gioco è quella di Viviana.


Il tris è un gioco che si fa a due. Si fanno due linee verticali e due orizzontali che si incrociano fino a formare nove caselle. Una persona sceglie la X e un altro il O. Si devono mettere 3 simboli in linea o in orizzontale o in verticale o in obliquo per fare tris. Chi fa tris per primo vince. I modi di fare tris sono 8: 3 in orizzontale, 3 in verticale e 2 in obliquo.

Ogni volta che cerchi di spiegare delle regole (o postulati) nel modo più chiaro possibile, stai facendo della matematica: prova a farlo, come ha fatto Viviana, con il gioco del tris. Immagina di doverti far capire da un marziano capace di contare, non troppo sveglio, molto pignolo e pieno di domande. Di seguito trovi alcune delle domande che sono venute in mente a noi. Mentre leggi, annota quelle che vengono in mente a te.

PERCHÉ VENGONO NOVE CASELLE?

Roberto: Perché vengono 9 caselle?
Francesco: Perché abbiamo fatto 2 linee orizzontali e due verticali.
Rocco: Che c'entra 2 con 9?
Salvatore: Perché 3 per 3 fa 9.

Alcuni (matematici, bambini o marziani) non si accontentano di fare qualche partita a tris tanto per fare qualcosa: vogliono la certezza che, facendo due linee orizzontali e due verticali, otterranno esattamente nove caselle. Se fai parte di loro, vedi se questo ragionamento ti convince.

TEOREMA: Due rette orizzontali e due rette verticali formano 9 caselle.

DIMOSTRAZIONE: Due rette orizzontali, da sole, dividono il piano in 3 parti (alto, medio, basso). Due rette verticali, da sole, dividono il piano in 3 parti (sinistra, centro, destra). Per questo, 2 rette orizzontali e 2 verticali, insieme, dividono il piano in 3x3=9 parti (alto sinistra, alto centro, alto destra, medio sinistra, medio centro, medio destra, basso sinistra, basso centro, basso destra).

Se questa spiegazione non ti piace, prova a scriverne una migliore. Se invece ti soddisfa, prova a trovarne una simile per altri problemi. Quelli che seguono sono solo degli esempi da cui puoi trarre ispirazione per inventarne di tuoi.

Se faccio 3 rette orizzontali e 3 verticali, cosa succede? Posso giocarci a tris?
Quante linee devo fare se voglio disegnare il campo per giocare a dama?
In quante parti posso dividere il piano tracciando linee rette? (Su quest'ultima domanda torneremo alla fine del libretto).

Ora torniamo al tris e al nostro marziano: ha capito la spiegazione di Viviana e vuole fare una partita. Per evitare una guerra interplanetaria occorre rispondere alla domanda seguente.

CHI FA LA PRIMA MOSSA?

Non sappiamo su Marte, ma qui sulla Terra, tutti vogliono fare la prima mossa. Tutti, infatti, pensano sia più facile vincere giocando per primi. La spiegazione più diffusa, dopo un po' di ragionamento, è la seguente.

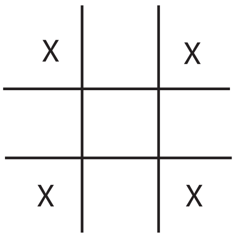
In tutto, visto che le caselle sono 9, i due giocatori possono fare al massimo 9 mosse. Il primo può farne al massimo 5, il secondo al massimo 4. Poiché chi ha più simboli sulla tabella ha più possibilità di fare tris, è meglio giocare per primi.

Laura suggerisce di scegliere chi comincia facendo il conto (sorteggio). Rocco dice di fare un numero pari di partite, incominciando una volta a testa, e contare alla fine chi ne ha vinte di più. Immaginiamo però che il marziano sia poco furbo (o molto generoso) e lasci sempre a noi la prima mossa. Conviene rispondere alla prossima domanda.

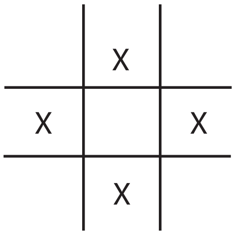
QUAL È LA MOSSA MIGLIORE PER INIZIARE?

Per iniziare, ho a disposizione 9 scelte diverse: tante quante sono le caselle. Alcune di queste scelte però "si assomigliano". Viviana lo ha spiegato così:

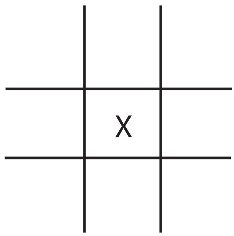
Girando un foglio le caselle sembrano diverse ma in realtà
sono sempre le stesse grazie al concetto di simmetria.
Allora si possono dare i nomi alle caselle: agli angoli forti
perché passano 3 tris, tra le caselle forti possono essere chiamate
deboli perché ci passano 2 tris, mentre la casella centrale può
essere chiamata super perché per lì passano 4 tris.



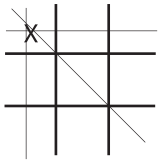
CASELLE FORTI



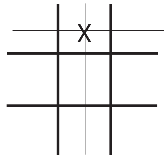
CASELLE DEBOLI



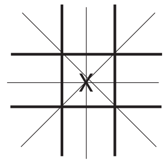
CASELLA SUPER



Per una casella forte
passano 3 tris.

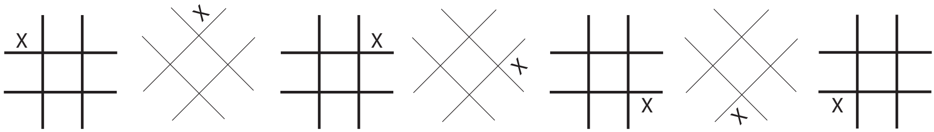


Per una casella debole
passano 2 tris.

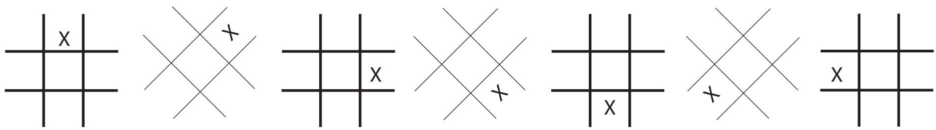


Per la casella super
passano 4 tris.

Immaginiamo di mettere il primo simbolo (croce) in alto a sinistra e, come suggerisce Viviana, di ruotare il foglio. Ecco quello che può accadere:



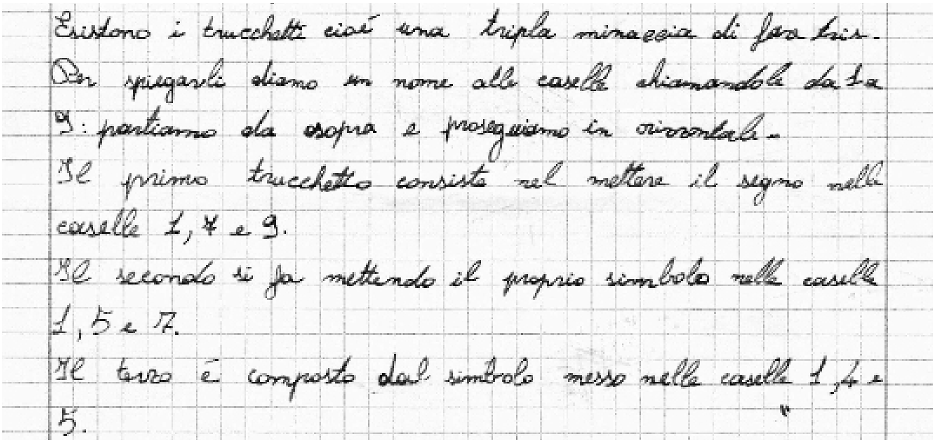
Allo stesso modo la casella in alto al centro, può finire in altri tre posti.

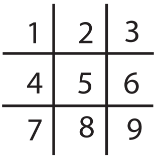


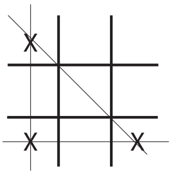
La casella centrale, invece, resta al centro, per qualunque rotazione del foglio. Questa distinzione tra le caselle ci mostra che le scelte "veramente" diverse non sono 9, ma soltanto 3.
Allora, sembra chiaro: la mossa migliore è al centro, perché è l'unica casella per cui passano ben 4 tris. Il prossimo paragrafo, però, potrebbe farti cambiare idea.

COME SI FA A VINCERE A TRIS?

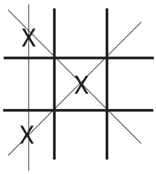
Giocando per un po' di tempo, ci siamo accorti che i più bravi, cioè quelli che vincono più spesso, sono quelli che usano dei "trucchetti". Cos'è un trucchetto ce lo facciamo spiegare, ancora una volta, da Viviana:


Esistono i trucchetti cioè una tripla minaccia di fare tris.
Per spiegarli diamo un nome alle caselle chiamandole da 1 a 9: partiamo da sopra e proseguiamo in orizzontale.
Il primo trucchetto consiste nel mettere il segno nelle caselle 1, 7 e 9.
Il secondo si fa mettendo il proprio simbolo nelle caselle 1, 5 e 7.
Il terzo è composto dal simbolo messo nelle caselle 1, 4 e 5.

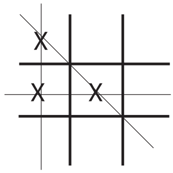




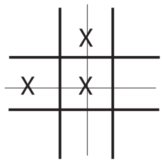
Il trucchetto (1,7,9) minaccia i tris (1,4,7), (7,8,9) e (1,5,9).



Il trucchetto (1,5,7) minaccia i tris (1,4,7), (1,5,9) e (3,5,7).

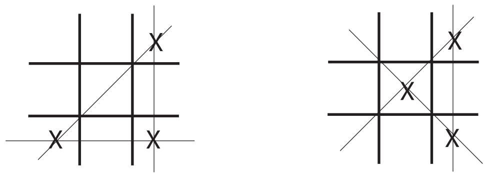


Il trucchetto (1,4,5) minaccia i tris (1,4,7), (4,5,6) e (1,5,9).

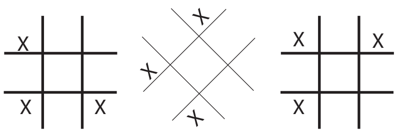


Questo non è un trucchetto. Infatti, la terna (2,4,5) minaccia solo i due tris (2,5,8) e (4,5,6) mentre, secondo la definizione di Viviana, un trucchetto deve minacciare tre tris (“tripla minaccia”).

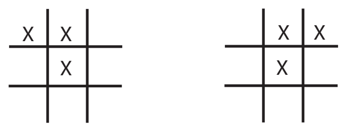
Ma non potrebbero esserci più di tre trucchetti? Cercando un po’, in effetti, se ne trovano altri, come quelli rappresentati in figura:



Quanti sono, allora, i trucchetti possibili? Se li conti tutti dovresti trovarne 16. Tuttavia, Viviana ha ragione a dire che sono solo 3: ricordi la simmetria?



Il trucchetto (1,7,9)
diventa (1,3,7) ruotando il foglio.

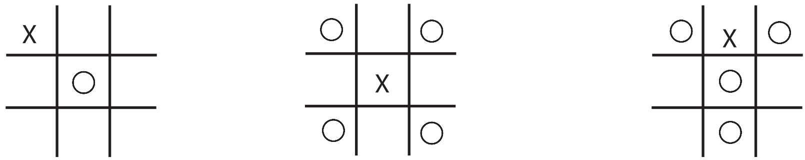


Il trucchetto (1,2,5)
diventa (2,3,5) guardando in trasparenza da dietro il foglio.

Si può dimostrare che, di tutti i 16 trucchetti che è possibile trovare, ognuno può essere trasformato in uno dei 3 trovati da Viviana, “girando il foglio” opportunamente.

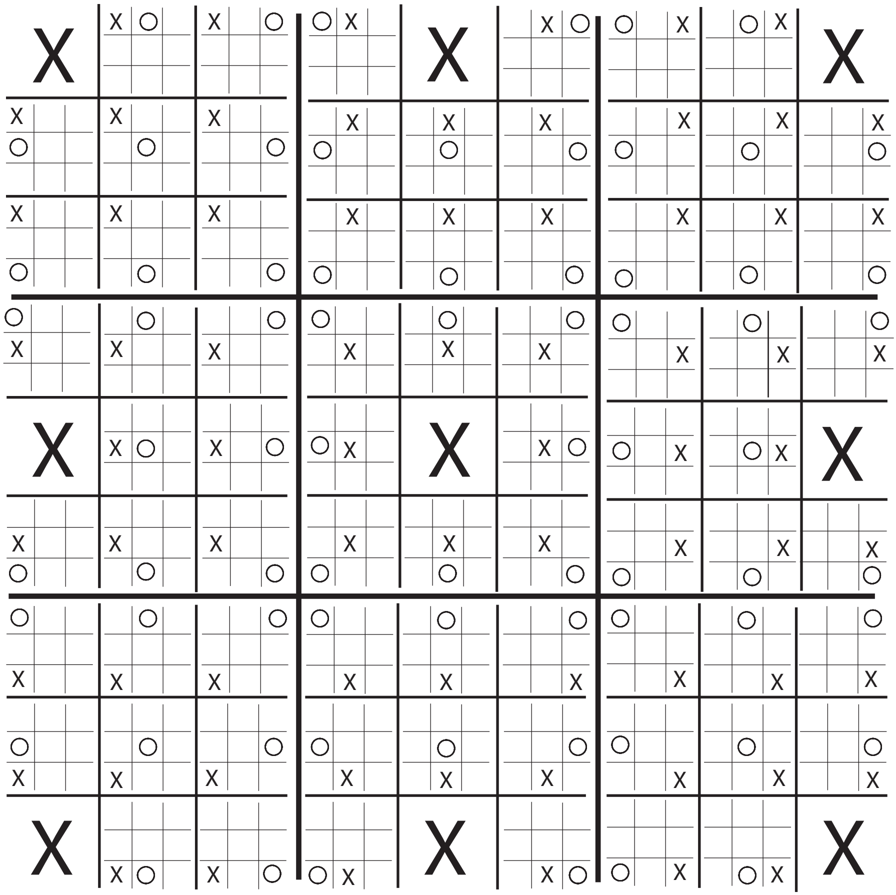
Usando i trucchetti, prova a dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA: Se il primo giocatore muove in un angolo, il secondo deve muovere al centro per non perdere. Se la prima mossa è al centro, il secondo deve muovere in un angolo. Se invece il primo muove in una casella debole, il secondo deve subito bloccare uno dei due tris passanti per quella casella.



In figura vengono indicate le risposte del secondo giocatore (cerchi) utili ad evitare una sconfitta: per ogni risposta diversa da quelle indicate, esiste una strategia che porta il primo giocatore (croci) ad un trucchetto, senza possibilità di salvezza per il secondo giocatore. Trovala!
Se il primo giocatore muove in un angolo, quindi, una sola (quella centrale) delle otto possibili risposte è in grado di evitare al secondo la sconfitta. Se invece il primo muove al centro, o in una casella debole, delle otto possibili risposte, la metà (quattro) è in grado di salvare il secondo giocatore dalla sconfitta. Quindi, conviene effettuare la prima mossa in una casella d'angolo (casella forte). Forse, abbiamo scoperto qual è la mossa migliore per iniziare ma siamo ancora lontani dallo scoprire come si fa a vincere. Il problema è più difficile di quanto ci aspettavamo. Un'idea di quanto sia complicato il gioco del tris può darcela la seguente domanda di Laura.

QUANTE PARTITE SI POSSONO FARE?



Nella figura precedente sono rappresentate tutte le possibilità di effettuare le prime 2 mosse. Per ciascuna delle 9 possibilità di X (prima mossa) sono disegnate 8 tabelle (una per ogni possibilità della seconda mossa ○) per un totale di 9x8=72 tabelle. Con una matita microscopica potremmo disegnare le 504=9x8x7 possibilità di effettuare le prime 3 mosse e, continuando ancora, tutte le possibilità di riempire la tabella con 5 X e 4 ○ per un totale di 362˙880=9x8x7x6x5x4x3x2.

In realtà, il numero di queste tabelle è più grande del numero di partite che è possibile giocare. Infatti, la nostra rappresentazione non considera che la partita finisce quando uno dei due fa tris: alcune tabelle, come quella in figura, rappresentano partite impossibili da giocare.

X	X	X
○	○	○
X	○	X

Non possono aver fatto tris tutti e due i giocatori.

Eliminando dal conteggio queste partite impossibili, il numero si riduce a 255˙168. Un modo per contarle è quello di considerare quante partite finiscono alla quinta mossa, quante alla sesta, alla settima, all'ottava e alla nona mossa e poi sommare. Se si tiene presente la simmetria, il numero di schemi finali è di 138 mentre il numero di partite possibili si riduce a 26˙830. Quest'ultimo numero è stato trovato da Steve Schaeffer solo nel 2002 e solo con l'utilizzo di un computer.

ALTRI GIOCHI

SOMMA 15

Si gioca in 2, con 9 carte. Ogni carta contiene un numero da 1 a 9. I giocatori scelgono una carta a testa alternandosi uno alla volta. Vince chi, per primo, ha 3 carte che sommate danno 15.

A prima vista questo gioco non ha niente a che vedere con il tris. L'unica somiglianza sembra essere il fatto che si gioca a due. Ma proviamo, come con il tris, a farci qualche domanda:

DI QUALI CARTE ABBIAMO BISOGNO?

Per rispondere a questa domanda occorre trovare le somme di tre numeri da 1 a 9 che danno 15. Non è difficile convincersi che queste sono tutte le possibilità:

15=9+5+1	15=9+4+2	15=8+6+1	15=8+5+2
15=8+4+3	15=7+6+2	15=7+5+3	15=6+5+4

Combinazione: sono 8, come i tris (ricordi: tre orizzontali, tre verticali e due diagonali). Forse, i due giochi si somigliano più di quanto immaginiamo: proviamo a farci le stesse domande di prima.

QUAL È LA MOSSA MIGLIORE PER INIZIARE?

A prima vista si direbbe che 5 è la scelta migliore. Infatti, degli 8 modi di ottenere 15, ben 4 contengono il 5. Il 9, invece, è contenuto solo in 2 somme; mentre 8 compare in 3 somme. Anche gli altri numeri pari (2,4 e 6) compaiono in 3 somme, mentre 1,3 e 7, come il 9, sono contenuti solo in 2 somme.

Ricorda niente? Non c'è qualcosa di simile tra le caselle del tris e le carte del gioco somma 15?
Prova ad associare una carta ad ogni casella. Scoprirai che i due giochi sono, come dicono i matematici, isomorfi (significa che hanno la stessa forma): scegliere una casella del tris è la stessa cosa che scegliere una carta del somma 15. Te ne accorgerai dopo aver risolto un'antico problema della matematica cinese:

IL QUADRATO MAGICO. Trovare una tabella quadrata le cui caselle sono numerate in modo che la somma lungo orizzontali, verticali e diagonali sia sempre la stessa.

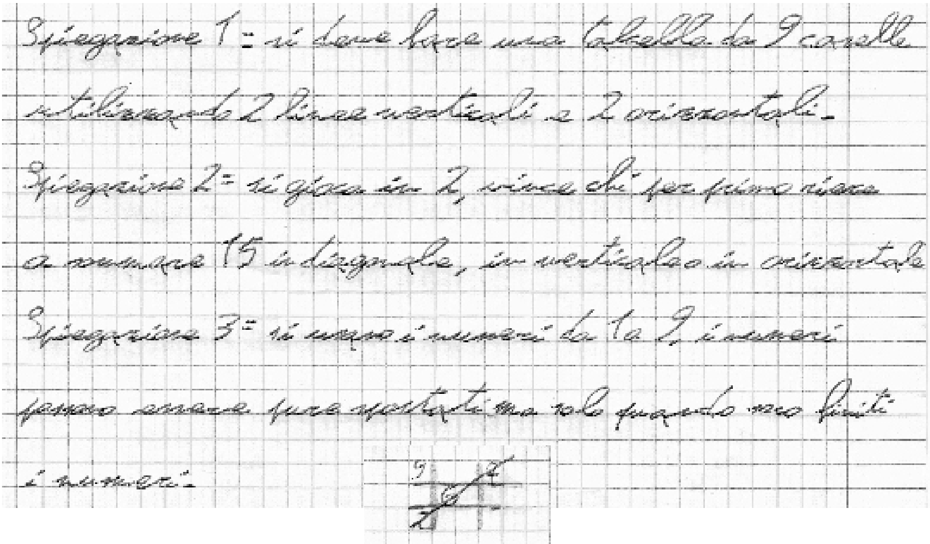
Nel caso della tabella del tris, ossia di un quadrato di 3x3=9 caselle, puoi convincerti che la somma deve essere per forza 15 (perché?) e il quadrato non può essere troppo diverso da questo.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Ci sono altri quadrati magici di 9 caselle (ne sono, guarda che coincidenza, 8): prova a trovarli tutti e scopri cos'hanno in comune.

TRIS DI MARIO

Mischiando le regole del somma 15 con quelle del tris, Mario ha inventato un nuovo gioco.


Spiegazione 1 = si deve fare una tabella da 9 caselle utilizzando 2 linee verticali e 2 orizzontali.
Spiegazione 2 = si gioca in 2, vince chi per primo riesce a sommare 15 in diagonale, in verticale o in orizzontale
Spiegazione 3 = si usano i numeri da 1 a 9, i numeri possono anche pure spostarli ma solo quando sono finiti i numeri.

Come il tris, questo gioco, si gioca in 2 e i due giocatori muovono uno alla volta, con l'obiettivo di mettere tre simboli in fila. La differenza principale con il tris è che i simboli sono costituiti da numeri e che, una volta messi sulla tabella non ha più importanza a chi appartengono: per fare tris si possono usare anche i numeri posizionati dall'avversario.

Ad esempio: se il mio avversario posiziona un 3 allineandolo con un 4 e con una casella libera, io posso vincere mettendo 8 nella casella libera (3+4+8=15).

3		
	8	
		4

Inoltre, se la partita non termina alla quinta mossa del primo giocatore (la mossa che riempie l'ultima casella), il secondo giocatore può scambiare di posto due numeri.
Se ad esempio, l'ultima mossa del primo giocatore lascia la tabella riempita come in figura (senza nessun "tris a 15"), il secondo giocatore, a cui spetta la mossa successiva, può scambiare di posto il 7 e il 4 ottenendo 2, 9, 4 sulla prima riga orizzontale e vincendo la partita.

2	9	7
3	1	4
8	6	5

Rocco propone di aggiungere due regole:

1- Alla prima mossa non si può utilizzare il 5. (Se provi a giocare, puoi accorgerti che, mettendo 5 alla prima mossa, è troppo facile vincere).

2- Se si riempie la tabella, possono essere spostati solo numeri che occupano caselle adiacenti (Questa invece serve a rendere la vita un po' più difficile al secondo giocatore).

Il tris di Mario si può giocare anche in tre, utilizzando 9 carte (3 a testa).

TRIS DI MARTA

Anche Marta ha inventato un gioco, mischiando il tris con un rompicapo solitario, che puoi provare a risolvere.

Riempi la tabella scrivendo i numeri in ordine da 1 a 100, partendo da dove vuoi e lasciando ogni volta 2 caselle vuote tra un numero e il successivo se ti sposti in orizzontale o verticale e lasciando invece una sola casella vuota se ti sposti in diagonale.

1			2						
			3						
					4				

Il tris di Marta si gioca in due su una scacchiera 6x6 (5 linee orizzontali e 5 verticali). Un giocatore ha i cerchi ed un altro le X e, come nel tris, bisogna metterne 3 in fila.
Qui però ogni nuova mossa deve stare a 2 caselle di distanza (misurate in orizzontale o verticale) oppure ad 1 casella di distanza (in obliquo) da una mossa fatta in precedenza.

X			X		
		○			X
○					

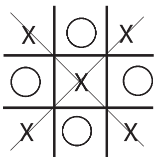
TRIS DI OSCAR

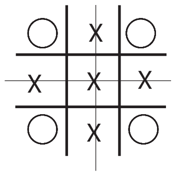
Oscar non ha inventato un nuovo gioco ma si è fatto una domanda che potrebbe farci venire qualche idea. Ecco la domada di Oscar:

POSSO FARE DUE TRIS IN UN COLPO SOLO?

Oscar ha trovato un modo per fare due tris in un colpo solo, anche se ammette che in una vera partita a tris è un po' difficile.

TEOREMA DI OSCAR: Se inizio una partita a tris e occupo ad ogni mossa una casella forte (angolo) mentre il mio avversario sceglie ogni volta una casella debole (tra due angoli), l'ultima mossa sarà al centro, facendo due tris in un colpo solo. Anche se io scelgo sempre le caselle deboli e il mio avversario sempre quelle forti, il doppio tris riesce.





Si potrebbe inventare un gioco in cui, per vincere, devi fare due tris in un colpo solo. Si potrebbe, come ha fatto Marta, decidere di giocare su una scacchiera più grande, visto che su quella del tris è troppo difficile. Anche se poco probabili nella pratica, però, le partite immaginate da Oscar sono molto importanti: sono le uniche partite che lasciano la scacchiera del tris piena in modo tale che qualunque rotazione del foglio non cambia la posizione di cerchi e X. Ma sono anche l'unico modo di realizzare un doppio tris?

TRIS A PERDERE

All'estremo opposto dell'idea di Oscar (l'idea di stravincere) c'è un modo di giocare, che può essere applicato al tris come a qualunque altro gioco: la versione "contraria" o "a perdere", quella in cui vince chi perde. Nel tris a perdere le regole sono le stesse del tris, solo che chi fa tris ha perso.

In questo gioco, vorresti fare la prima o la seconda mossa? Prova a farti le stesse domande che ti sei fatto per il tris e vedi cosa riesci a scoprire. Puoi trovare un modo per evitare di fare tris (provaci!) ma non esiste un modo per farlo fare al proprio avversario, se anche lui conosce il modo di evitarlo. Tanto per ingarbugliarti i pensieri, puoi provare a dimostrare il risultato seguente.

TEOREMA: Nel tris esiste una strategia adatta a non perdere ed una adatta a non vincere, ma non esiste né una strategia adatta a vincere né una adatta a perdere.

Ogni tanto in matematica accade che non troviamo qualcosa per la semplice ragione che questa cosa non esiste: è il caso di una strategia adatta a vincere al gioco del tris. "Non perdere" e "vincere" non sono la

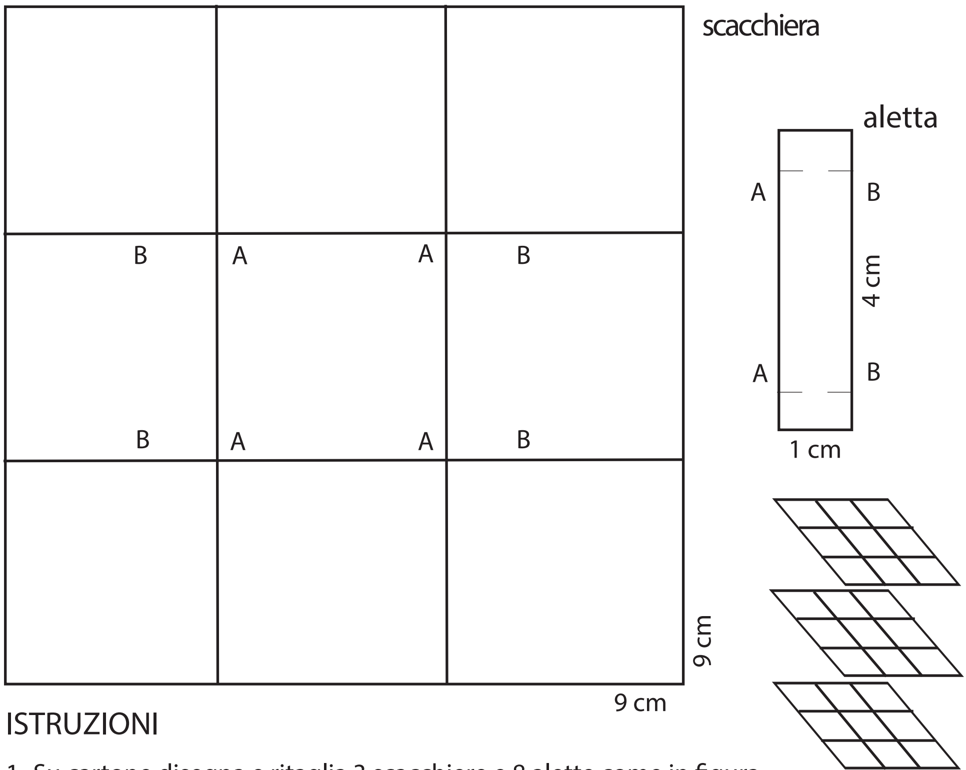
stessa cosa poiché esiste la possibilità di pareggiare. Allo stesso modo, "non vincere" è diverso da "perdere". Proprio perché un giocatore esperto è sempre in grado di pareggiare, nessuno può dire "Vinco contro chiunque". Bisogna accontentarsi di un più modesto "Nessuno mi può battere".
Il pareggio, insomma, rende tutto più complicato. Per questo ai matematici piace sapere, di un gioco, se finisce sempre con la vittoria di qualcuno, se esiste la possibilità di un pareggio o se, addirittura il pareggio è l'unico risultato possibile tra giocatori esperti (come nel tris). Non sempre è facile: per il gioco della dama, ad esempio, questo problema è stato risolto solo nel 2007 e solo grazie all'uso della tecnologia. Centinaia di computer, nell'arco di 18 anni, hanno esaminato tutte le partite di dama, concludendo che anche a dama, come a tris, il risultato necessario tra due giocatori "perfetti" è il pareggio. Le partite di dama sono molte di più di quelle del tris, per due motivi: ci sono più caselle e le pedine si muovono. "Mischiando" queste due nuove regole puoi inventare moltissime varianti del tris. La più antica di tutte, forse, è la seguente.

TRIS MOBILE

Si gioca sulla scacchiera del tris. I 2 giocatori hanno 3 pedine a testa e ne piazzano una alla volta a turno, con l'obiettivo di fare tris. Posizionate le 6 pedine, se nessuno ha fatto tris (e dovrebbe essere così se nessuno dorme) si continua a muovere uno alla volta spostando una propria pedina in una casella adiacente in verticale o in orizzontale. La prima mossa non può essere al centro (altrimenti sarebbe troppo facile vincere per il primo giocatore: prova a scoprire perché). Varianti del gioco consentono di muovere lungo le diagonali principali, di un passo in qualunque direzione o addirittura verso qualunque casella libera. La versione "un passo in qualunque direzione" è divertente giocata in due squadre da 3 persone di "pedine umane" che si muovono su una scacchiera disegnata a terra.

TRIS 3D

Il campo da gioco è formato da tre scacchiere di tris sovrapposte, che puoi realizzare seguendo le istruzioni alla pagina seguente. Come nel tris, vince chi mette tre simboli in fila, ma i tris sono molti di più: se conti bene dovresti trovarne 49.
Tutti i problemi del tris diventano un po' più complicati: prova a vedere quanti tris passano per ciascuna casella, che succede "girando", se esistono "trucchetti" e se è possibile inventare nuove varianti del gioco su questa scacchiera. Nel 1941 due studenti dell'Università di Chicago, Price Parks e Robert Satten, ne inventarono una applicando l'idea di Oscar: vince chi fa due tris in un colpo solo (con la limitazione che la casella centrale può essere occupata solo in caso di necessità: per fare o per impedire il doppio tris).



ISTRUZIONI

1- Su cartone disegna e ritaglia 3 scacchiere e 8 alette come in figura.
2 - Piega le alette lungo le linee tratteggiate e incolla le prime 4 sulla prima scacchiera, facendo coincidere le lettere.
3 - Sovrapponi e incolla la seconda scacchiera.
4 - Ripeti il punto 2 sulla seconda scacchiera.
5 - Incolla l'ultima scacchiera.
6 - Realizza 26 pedine (13 per ogni giocatore).

ALT(R)A MATEMATICA

ARITMETICA

La matematica è la regina delle scienze e
l'aritmetica la regina della matematica.
Carl Friedrich Gauss

Per risolvere il problema del quadrato magico (V. Somma 15) abbiamo ragionato così:

Se devo mettere i numeri da 1 a 9 nella tabella del tris, in modo che la somma su ogni riga (e colonna) sia sempre la stessa, posso scoprire quanto deve essere questa somma, addizionando tutti i numeri da 1 a 9 e dividendo il risultato per 3 (il numero delle righe). Ogni riga quindi deve dare come somma 45:3=15. Infatti è facile verificare che 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.

IL PICCOLO CARLETTO

Sommare numeri consecutivi è un problema molto antico della matematica. Due secoli e mezzo fa, però, un bambino tedesco di 8 anni ha legato per sempre questo problema al suo nome. Carletto, così si chiamava, sorprese il suo insegnante di matematica e i suoi compagni di classe, risolvendo un problema che tutti consideravano molto difficile: sommare i numeri da 1 a 100. Il problema era stato assegnato per tenere la classe impegnata un po' di tempo a fare calcoli, ma Carletto, in pochi secondi, diede la risposta esatta: 5˙050.

QUAL ERA IL "TRUCCHETTO" DI CARLETTO?

Se prendi un insieme di numeri consecutivi (poniamo, quelli da 1 a 9, ma potresti farlo anche con i primi cento o mille) puoi osservare una certa simmetria. Se li scrivi in ordine su una riga e poi al contrario nella riga sotto, la somma delle colonne è sempre la stessa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	10	10	10	10	10	10	10	10

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 10 x 9 : 2 = 45

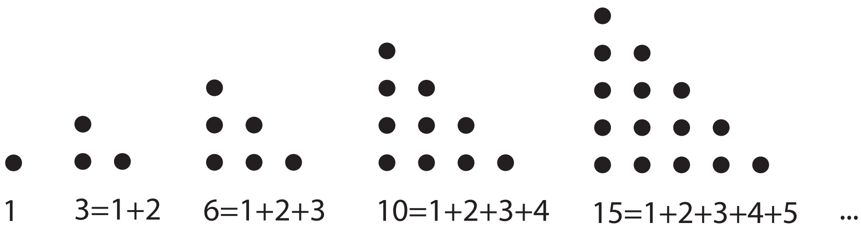
Ecco il "trucchetto" di Carletto: fare la somma due volte anziché una sola!

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100
100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1
101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101

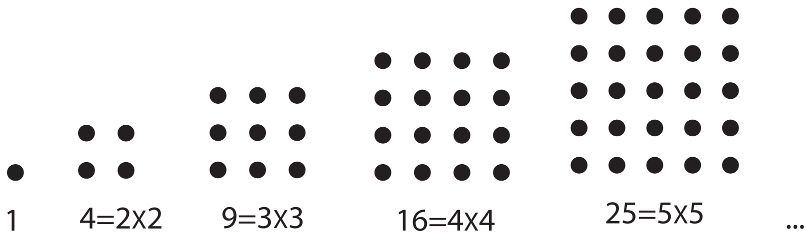
1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 = 101 x 100 : 2 = 5˙050

I numeri come 45 o 5˙050 vengono chiamati dai matematici numeri di Gauss (perché il nome completo di Carletto era Carl Friedrich Gauss) o anche numeri triangolari.

Da questa figura si capisce perché li chiamano triangolari:



I numeri quadrati invece sono quelli che, come 9, si possono usare come numero di sassolini per formare un quadrato:



I numeri che possono essere pensati come mucchietti di sassolini vengono chiamati dai matematici numeri naturali mentre la parte di matematica che studia questi numeri si chiama aritmetica. Ecco alcuni risultati di aritmetica che puoi provare a dimostrare.

Un numero quadrato è ottenuto moltiplicando un numero naturale per se stesso.
Un numero triangolare è ottenuto moltiplicando un numero naturale per il suo successivo e dividendo il risultato per due.

Sommando due numeri triangolari consecutivi si ottiene un numero quadrato.
Sommando i numeri dispari in fila a partire da 1, si ottiene un numero quadrato.

I problemi dell'aritmetica sembrano semplici ma a volte possono risultare difficilissimi. Per alcuni, come quelli precedenti, basta un po' di pazienza; altri richiedono anni di impegno. Persino Gauss impiegò una decina di anni a scoprire che ogni numero naturale è somma di al massimo tre numeri triangolari e di al massimo quattro numeri quadrati. In poco tempo potresti accorgerti che esistono numeri triangolari che sono anche quadrati (basta trovarne uno) ma è un bel po' più difficile vedere se ce ne sono altri e quanti altri. Gauss, che viene ricordato come uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, amava ripetere che "se altri non facessero altro che riflettere sulle verità matematiche così in profondo e con continuità come ho fatto io, farebbero le mie scoperte".
Forse non possiamo fare le stesse scoperte che fece Gauss, ma possiamo prendere qualcosa del suo approccio alla matematica: "non è la conoscenza, ma l'atto di imparare; non il possesso, ma l'atto di arrivarci, che dà la gioia maggiore".
Insomma, non è importante dove arriviamo ma la via che facciamo per arrivarci. Questa via, quella dell'aritmetica, passa per tre postulati enunciati da Giuseppe Peano nel 1889.

POSTULATO 1: 0 è un numero naturale.

POSTULATO 2: Ogni numero naturale ha un successivo (il più piccolo tra quelli più grandi di lui).

POSTULATO 3: Se un insieme contiene 0 e ogni volta che contiene un numero naturale ne contiene anche il successivo, allora contiene tutti i numeri naturali.

È quanto basta per iniziare a farsi domande su quelle strane creature che conosciamo da quando abbiamo iniziato a parlare (uno, due, tre, ...) e sulle quali c'è ancora tanto da scoprire.

ALGEBRA

Spero che in seguito si troverà qualcuno che
avrà interesse a decifrare questo guazzabuglio.
Evariste Galois

Abbiamo visto che alcune caselle del tris "si somigliano" nel senso che non sono distinguibili una dall'altra se si gira il foglio. Ecco due esempi:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Trasformazione "ruota"
Blocca la casella centrale con un dito e fai ruotare il foglio fino a portare la casella numero 7 al posto della 1.

7	4	1
8	5	2
9	6	3

fig. 1

Ecco come si spostano i numeri.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Trasformazione
"sfoglia e leggi dietro"
Sfoglia la pagina e guarda il disegno in trasparenza dalla pagina di dietro.

3	2	1
6	5	4
9	8	7

Un ragazzo francese di vent’anni, nel 1832, ebbe un’idea che possiamo tradurre così:

E se, invece di concentrarci sulle caselle, pensassimo ai modi di scambiarle tra di loro?

In verità, Evariste Galois, così si chiamava, non stava pensando alle caselle del tris ma alle soluzioni delle equazioni. L’idea che ebbe, però, è applicabile anche al gioco del tris e a molto altro: si tratta di considerare le trasformazioni (come le nostre rotazioni del foglio) che non modificano la struttura in esame. Galois, per pimo, chiamò gruppo l’insieme di queste trasformazioni ed osservò: “se due trasformazioni appartengono al gruppo, applicandone prima una e poi l’altra si ottiene una trasformazione che ancora appartiene al gruppo”.

Prendiamo i nostri esempi di trasformazione della tabella del tris. Se indichiamo con r ed s le due trasformazioni spiegate in figura 1, possiamo ottenere una nuova trasformazione applicando prima r (ruota) e poi s (sfoglia e leggi da dietro):

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$\xrightarrow{r}$

7	4	1
8	5	2
9	6	3

$\xrightarrow{s}$

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Chiameremo questa nuova trasformazione r*s e diremo che * è la moltiplicazione del gruppo.

Se invece applichiamo prima s (sfoglia e leggi da dietro) e poi r (ruota), avremo la trasformazione s*r

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$\xrightarrow{s}$

3	2	1
6	5	4
9	8	7

$\xrightarrow{r}$

9	6	3
8	5	2
7	4	1

Quante trasformazioni troveremo? Sono otto e questo è l'elenco completo:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

I è la trasformazione identica (che lascia tutto al suo posto)

7	4	1
8	5	2
9	6	3

r è la rotazione spiegata in fig. 1

9	8	7
6	5	4
3	2	1

r*r è ottenuta applicando 2 volte r. Si indica con r^2

3	6	9
2	5	8
1	4	7

r*r*r è ottenuta applicando 3 volte r. Si indica con r^3

3	2	1
6	5	4
9	8	7

s è la trasformazione “sfoglia e leggi da dietro” spiegata in fig. 1

1	4	7
2	5	8
3	6	9

r *s è ottenuta applicando prima r e poi s

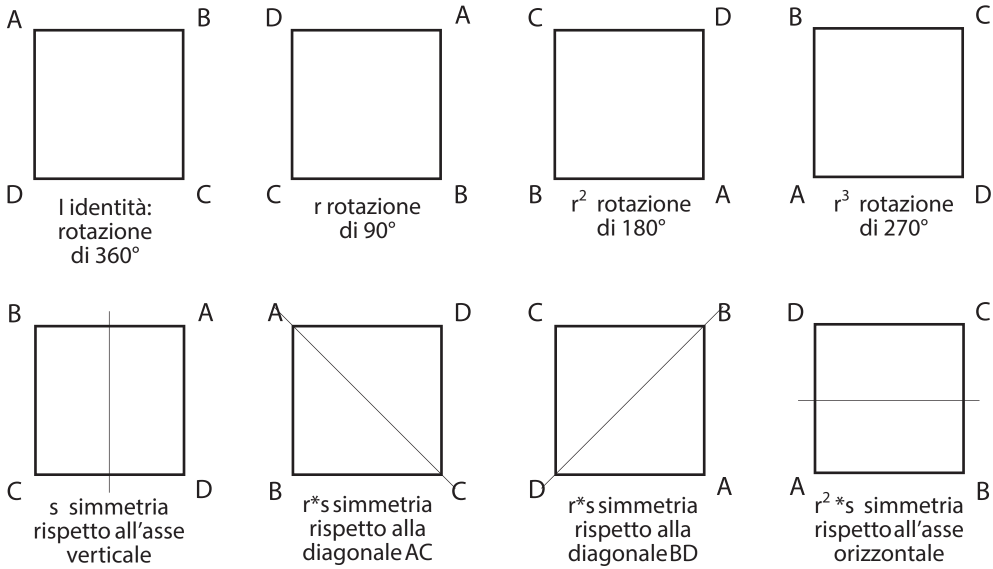
9	6	3
8	5	2
7	4	1

s*r è ottenuta applicando prima s e poi r

7	8	9
4	5	6
1	2	3

r^2 *s è ottenuta applicando prima r^2 e poi s

Ecco perché il numero 8 veniva fuori di continuo (8 tris, 8 modi di ottenere 15, 8 quadrati magici). Otto sono, infatti, i modi di scambiare tra di loro i punti di un quadrato conservando le distanze (i matematici chiamano queste trasformazioni Isometrie del quadrato).



I matematici dicono che il gruppo delle isometrie del quadrato agisce sull'insieme delle caselle del tris. La cosa fantastica è che lo stesso gruppo può agire sugli insiemi più disparati: su quello delle caselle del tris (che sono 8) come su quello delle partite possibili (che sono 255·168), sull'insieme dei vertici di un quadrato (che sono 4) come su quello di tutti i suoi punti (che sono infiniti). Ciò che conta di più in tutte queste situazioni è il gruppo delle isometrie del quadrato, i suoi 8 elementi e il modo in cui si moltiplicano tra di loro. Le regole principali di questo, come di qualunque altro gruppo, sono tre semplici postulati.

POSTULATO 1: moltiplicando prima due elementi tra di loro e poi il risultato con un terzo elemento del gruppo, si ottiene lo stesso elemento che si avrebbe moltiplicando il primo con il risultato della moltiplicazione tra il secondo e il terzo. In simboli si scrive $(a*b)*c=a*(b*c)$ qualunque siano gli elementi a,b e c del gruppo e si dice che la moltiplicazione * gode della proprietà associativa.

POSTULATO 2: Esiste un elemento del gruppo che moltiplicato per qualunque altro lascia quest'ultimo inalterato. In simboli si scrive che esiste un elemento e tale che $e*a=a*e=a$ per ogni elemento a del gruppo e si dice che e è l'elemento neutro del gruppo.

POSTULATO 3: Dato un elemento del gruppo ne esiste un altro che moltiplicato per quest'ultimo dà l'elemento neutro. In simboli si scrive che per ogni elemento a del gruppo esiste b tale che $a*b=b*a=e$, dove e è l'elemento neutro e si dice che ogni elemento ammette simmetrico.

La teoria dei gruppi parte da questi tre postulati e raggiunge praticamente tutte le branche della matematica. Galois ne gettò le basi in una lettera scritta ad un amico il 29 maggio 1832, la sera prima di morire in duello.

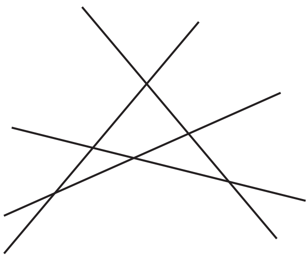
GEOMETRIA

Non esiste nessuna strada regale che porti alla geometria.
Euclide

QUANTE CASELLE?

Per inventare nuove domande i matematici non aspettano il colpo di genio: sanno che basta modificare di poco un problema conosciuto per ottenerne uno nuovo. Prendiamo, ad esempio, il teorema del paragrafo “Perché vengono 9 caselle?” e togliamo qualche parola: ad esempio togliamo i termini verticale e orizzontale. Il teorema diventa:

Due rette e due rette formano 9 caselle.



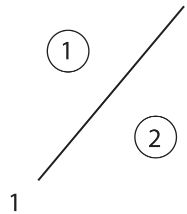
Questa figura dimostra che il teorema non è più valido.

Quante caselle ci sono in questa strana scacchiera?

In quante parti può essere diviso il piano con 4 rette? Una risposta è senz’altro 9 ma, guardando bene l’ultima figura ci accorgiamo che anche 11 è una risposta possibile. Quali sono allora tutte le possibilità? Con un po’ di sforzo puoi arrivare ad un teorema.

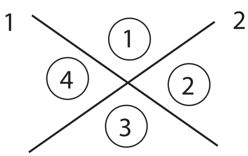
TEOREMA: Tracciando 4 rette divido il piano in un numero di parti che va da un minimo di 5 a un massimo di 11.

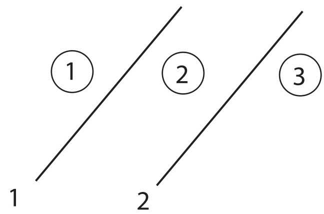
Partiamo dal problema più semplice: che succede se traccio una sola retta? Ovviamente divido il piano in 2 parti.



In questa come nelle altre figure i numeri cerchiati indicano le parti in cui il piano viene diviso, quelli non cerchiati indicano le rette.

Tracciando 2 linee rette posso dividere il piano in 4 parti (se si incontrano) o in 3 parti (se non si incontrano).

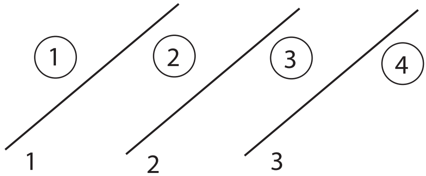




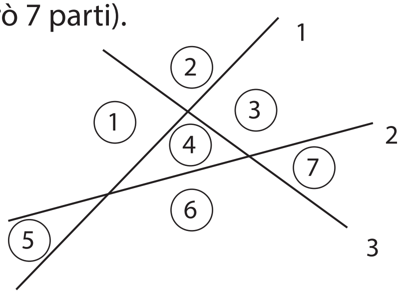
Due cose dovrebbero apparire chiare:

- Ogni volta che traccio una nuova retta il numero di parti in cui divido il piano aumenta.
- Il numero di parti in cui il piano viene diviso aumenta di più se le nuove rette incontrano quelle vecchie.

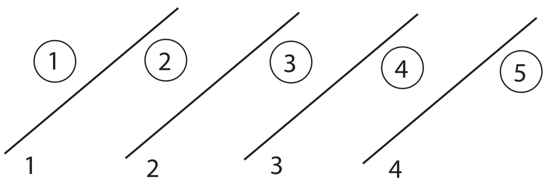
Se, ad esempio, voglio dividere il piano in "poche" parti, traccerò le rette in maniera tale che non si incontrano mai tra di loro (e avrò 4 parti):



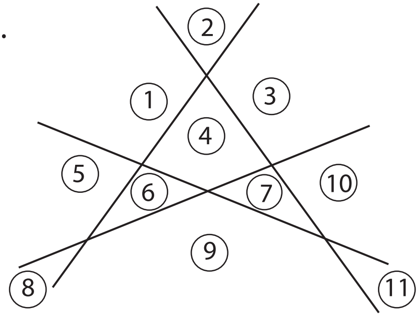
Se, invece, voglio con tre rette dividere il piano in un numero "grande" di parti, traccerò ogni nuova retta in modo da incontrare tutte quelle precedenti (e avrò 7 parti).



Se voglio dividere "poco" il piano con 4 rette, otterrò 5 parti.



Se voglio dividerlo “tanto” ne avrò 11.



Pensando ad una torta da tagliare, il nostro teorema è una conseguenza del seguente.

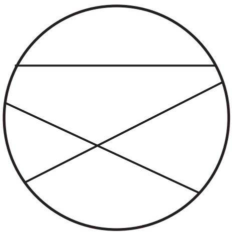
TEOREMA: Ogni volta che si traccia un nuovo taglio si aggiungono un numero di parti pari al numero di punti di intersezione con gli altri tagli aumentato di un’unità.

Ecco perché con 4 tagli si possono avere al massimo 11 parti: perché 11=1+1+2+3+4 (ricorda niente?). Con il primo taglio si aggiunge una parte all’unica parte iniziale e si hanno 1+1=2 parti. Con il secondo taglio si aggiungono 2 nuove parti (se questo taglio incontra l’altro taglio), per un totale di 4=1+1+2. Con il terzo taglio si aggiungono 3 nuove parti (se questo taglio incontra ciascuno degli altri 2 tagli), per un totale di 7=1+1+2+3. Con il quarto taglio si aggiungono 4 nuove parti (se questo taglio incontra ciascuno degli altri 3 tagli), per un totale di 11=1+1+2+3+4.

Con 10 tagli, quindi, potrai dividere una torta in un numero di parti che va da un minimo di 11=10+1 a un massimo di 56=1+1+2+3+4+5+6+7+8+9 +10. A questo punto nasce una nuova domanda.

POSSO SCEGLIERE QUALUNQUE NUMERO COMPRESO TRA IL MINIMO E IL MASSIMO?

La risposta è si, se stiamo parlando di una torta, no se pensiamo al nostro problema originario del piano infinito. Abbiamo detto, ad esempio, che con tre tagli il numero minimo di parti in cui posso dividere una torta è 4=3+1 ed il massimo è 7=1+1+2+3. Se voglio dividere la torta in 5 parti, con tre tagli, posso trovare questa soluzione.



Questa soluzione non è possibile nel piano infinito, perché alcuni tagli si incontrerebbero determinando un numero di parti maggiore di 5.
La ragione è la seguente:

NON POSSO DISEGNARE DUE RETTE CHE SI INCONTRANO ED UNA TERZA CHE NON INCONTRA NESSUNA DELLE ALTRE DUE.

Nell'antica Grecia, un uomo di nome Euclide dimostrò quest'affermazione in un libro intitolato Elementi di geometria. Tuttavia Euclide non era contento della sua dimostrazione. Puoi capire il perché di questa insoddisfazione leggendo i cinque postulati che aprivano gli Elementi.

POSTULATO 1: Per due punti distinti passa una ed una sola retta.

POSTULATO 2: Ogni retta può essere prolungata indefinitamente in ciascuno dei due versi.

POSTULATO 3: Dati due punti esiste una circonferenza con centro nel primo punto passante per il secondo [Per circonferenza si intende l'insieme dei punti che hanno la stessa distanza da un punto fissato, detto centro].

POSTULATO 4: Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro [Per angolo retto si intende quello formato da due rette che incontrandosi dividono il piano in 4 parti congruenti. Qui come altrove, congruenti si dice di due figure che, se le sovrapponi, ne vedi una sola].

POSTULATO 5: Due rette si intersecano dal lato in cui la somma degli angoli interni alla striscia formati con una terza retta è minore di un angolo piatto [Per angolo piatto si intende la somma di due angoli retti].

Scommetto che il postulato 5 è quello che fai più fatica ad accettare! Non preoccuparti: è stato così anche per Euclide e per i matematici che lo hanno seguito nei due millenni successivi. Eppure, senza il quinto postulato, si possono dimostrare molte cose inerenti le costruzioni con riga e compasso (Euclide inizia dimostrando che si può costruire un triangolo con tre lati congruenti, provaci anche tu!) ma non si può dimostrare un risultato come quello che da il titolo a questo paragrafo. Ci sono voluti più di 2000 anni per arrivare a questa conclusione e lo stesso Gauss, sebbene fosse un gigante della matematica, ne aveva paura: ci sono mondi in cui il quinto postulato è valido e mondi in cui il quinto postulato non è valido (come quello della torta, che possiamo dividere in 5 parti con 3 rette). Per molto tempo gli Elementi di Euclide sono stati considerati "la Bibbia dei matematici" e i cinque postulati da cui partiva "evidenti agli occhi di chiunque". Nella prima metà del 1800, Carl Gauss, Nicolaj Lobačevskij e Jànos Boylai hanno dimostrato che non c'è niente di "evidente" nel quinto postulato e, quindi, nemmeno negli altri quattro. Oggi i matematici fanno a meno di una Bibbia e di "regole evidenti". Ognuno si sceglie le regole del mondo in cui vuole vivere e del gioco a cui giocare. Solo tu puoi trovare le tue.