LAMENTO DI UN MATEMATICO Come la scuola ci ruba la nostra forma d'arte più affascinante e immaginifica
edizioni sprofessori

http://sprofessori.noblogs.org

PREFAZIONE

Come critici dell'autorità in genere e dell'obbligo scolastico in particolare, ci siamo spesso imbattuti nell'accusa di voler lasciar marcire nell'ignoranza le generazioni future. Dal canto nostro, continuiamo a coltivare il dubbio che la scuola sia una delle cause dell'ignoranza, piuttosto che un rimedio. Se ancora esiste qualcuno in grado di leggere, scrivere e far di conto, ciò avviene nonostante la scuola e non grazie ad essa. La ragione principale di questa nuova pubblicazione di Sprofessori è dunque quella di continuare a riproporre il tema della scuola fuori dal contesto riformista, nazionale e pedagogico.

Il testo che presentiamo suggerisce l'idea che chiunque ami la matematica non può che odiare la scuola. Paul Lockhart è un innamorato della matematica, giunto alla critica dell'istituzione scolastica proprio a partire da quest'amore. Ci vengono in mente le parole che un geniale ventenne, di nome Evariste Galois, scrisse quasi due secoli fa prima di morire in duello.

Chiedete agli uomini di cuore di avere pietà per ciò che accade. Pietà mai! Odio, soltanto. Chi non lo avverte in maniera profonda quest'odio del presente, non può amare veramente il futuro.

L'amore per la curiosità verso un problema semplice ed inutile, per uno sforzo ripagato dalla contemplazione di una bellezza assoluta e per l'autocompiacimento che la scoperta matematica produce è, nel testo di Lockhart, un'unica cosa con l'odio verso le bassezze della vita scolastica, la ripetizione mnemonica di risposte a problemi che qualcun altro si è posto e le prove a tempo che la scuola vorrebbe spacciare per verifiche di matematica.

TEOREMA. Chi ama la matematica deve necessariamente odiarne quella pantomima spacciata dal programma scolastico.

Profondamente convinto di questa affermazione Lockhart non può fare a meno di inferirne la conseguenza logica:

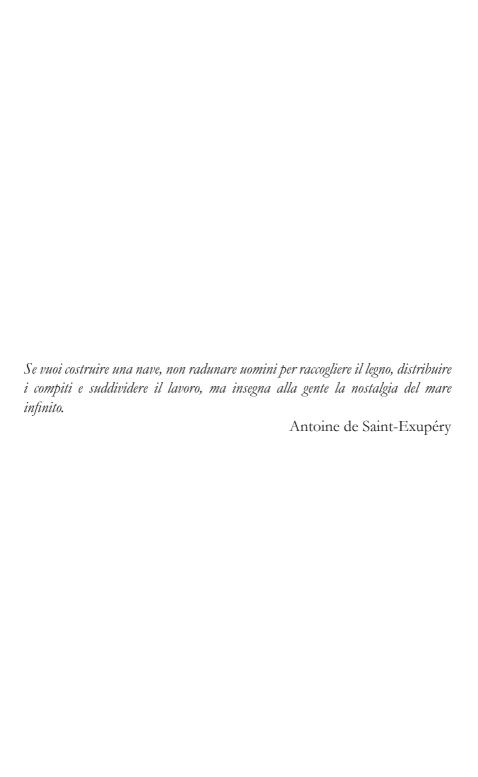
COROLLARIO. Gli insegnanti di matematica non amano la matematica.

Lockhart temeva di parlare ai sordi e, a giudicare dalle reazioni che la pubblicazione ha suscitato, aveva ragione. Molti hanno letto nel suo scritto un attacco agli insegnanti, un'assurda pretesa di genialità matematica verso dei funzionari statali che «guadagnano poco» e, in fondo, non sono tenuti ad essere dei ricercatori scientifici. Cosa ancora peggiore, il testo è finito negli scaffali delle librerie nel reparto «didattica della matematica», disciplina di cui Lockhart non ha un'alta considerazione.

Inizialmente, nel 2002 fece circolare informalmente una prima versione dello scritto senza curarsi troppo né di eventuali critici né di ancor meno probabili adulatori. Nel 2007 Keith Delvin, curatore della rubrica Devlin's Angle, per la Mathematical Association of America, dopo aver letto una copia del dattiloscritto, decise di contattare l'autore. Nel 2008, il Delvin's Angle diede spazio al Lamento di un matematico. Delvin è un importante professore della Stanford University, una di quelle università private americane in cui i ricchi possono imparare a dirigere multinazionali, per cui è chiaro che non poteva condividere alcune idee di Lockhart. Nonostante ciò, il Lamento di un matematico ha trovato in Delvin un sostenitore accanito ed è a lui che dobbiamo la diffusione delle idee di Lockhart. La ragione di quest'entusiasmo è presto detta: il libro è, oltre che una denuncia, un ottimo libro di matematica; non solo di introduzione alla matematica, ma anche di idee matematiche e idee sulla matematica. Queste ultime, sono senz'altro molto personali e spesso inconciliabili con altri punti di vista, altrettanto diffusi tra gli specialisti. D'altra parte non è necessario condividere la visione di Lockhart della matematica come «arte della spiegazione» per convincersi che essa ha a che fare con domande, congetture e teoremi e non con campanelle, interrogazioni, compiti in classe ed esami. Un matematico come Delvin, deve essere stato attratto al testo di Lockhart, dalla stessa ragione che lo ha attratto alla matematica: la bellezza della verità. La verità, semplice per quanto impopolare, è che la matematica non ha niente a che fare né con la scuola né con l'ora di matematica. L'imposizione di tempi, schemi, dogmi, gare e filastrocche è non solo distinta, ma agli antipodi dell'attività matematica. L'arte, la scienza, la poesia, la filosofia o la matematica, ammesso che appartengano a categorie separate, hanno tutte bisogno dell'ozio di un animo sensibile. Il fatto che oggi queste attività siano peculiari di alcuni uomini chiamati artisti, scienziati, poeti, filosofi e matematici significa solo che l'umanità non è libera. Lockhart sa che non è in suo potere liberare l'umanità ma, non per questo, rinuncia a liberare una delle sue passioni, quella che egli definisce «la forma d'arte più tipicamente umana». È questo il suggerimento principale che vogliamo raccogliere dal libro: il rifiuto di seppellire le nostre passioni e la nostra umanità,

in fondo a quel mare di stupidità formato da registri, appelli, voti, provvedimenti, direttive o, con una parola sola, burocrazia. Questo rifiuto, passa attraverso il nostro bisogno di autogestione ed il nostro impegno alla condivisione: un'autogestione ed una condivisione, parziali, siamo d'accordo, visto che l'assuefazione regna sovrana ed i vari profili facebook sembrano bastare al bisogno di autoaffermazione degli individui. Ma un'autogestione ed una condivisione che abbiamo bisogno di praticare almeno un po', per non perdere del tutto la capacità di apprezzarne gli effetti benefici.

In questa direzione va la scelta di pubblicare un testo che, edito nel 2010 in Italia, è già irreperibile. Per inciso, osserviamo che potrebbe fornire qualche argomento alle ragioni della lettura illegale che ne state per fare il fatto che i diritti di riproduzione andrebbero ad una casa editrice (la Rizzoli) che oggi non è in grado di fornire il libro, la quale a sua volta, ha dovuto accordarsi con un professore universitario (il succitato Keith Delvin) che non ha scritto il libro. Lo riproponiamo con il suo titolo originale e, soprattutto, in quello che consideriamo il suo contesto naturale: il confronto di idee tra persone che nutrono qualche interesse per la matematica.



PARTE I

Lamentazione

Un musicista si sveglia da un terribile incubo. Nel sogno si ritrova in una società in cui l'educazione musicale è stata resa obbligatoria. «Aiuteremo i nostri studenti a diventare più competitivi in un mondo sempre più affollato di suoni». La responsabilità di questo progetto d'importanza vitale viene affidata ai pedagoghi, ai sistemi scolastici e allo Stato. Si commissionano studi, si istituiscono comitati e si prendono decisioni, tutto senza i consigli o la partecipazione di un solo musicista o di un solo compositore professionista.

Poiché, come è noto, i musicisti mettono le loro idee per iscritto in forma di spartiti, quelle curiose sequenze di punti e linee devono costituire il «linguaggio della musica». Se si vuole che gli studenti raggiungano una competenza musicale di un livello qualsiasi, è imperativo che imparino a padroneggiare quel linguaggio; in effetti sarebbe assurdo aspettarsi che un bambino canti una canzone o suoni uno strumento senza avere una conoscenza di base della notazione e della teoria musicali. Suonare e ascoltare musica, per non parlare di comporre un brano originale, sono considerate pratiche molto avanzate il cui insegnamento viene di solito rinviato fino al college, e più spesso fino alla scuola di specializzazione.

Quanto alla scuola primaria e a quella secondaria, la loro missione è insegnare agli alunni a usare i1 linguaggio della musica, a maneggiarne i simboli in base a un insieme prefissato di regole: «Quando abbiamo lezione di musica tiriamo fuori i nostri fogli di carta pentagrammata, l'insegnante scrive alcune note alla lavagna e noi le copiamo o le trasponiamo in un'altra chiave. Dobbiamo stare attenti a non sbagliare le chiavi e le armature, e il nostro insegnante è molto pignolo nel verificare che abbiamo inserito tutte le semiminime. Una volta dovevamo risolvere un problema di scala cromatica e io trovai la soluzione giusta, ma l'insegnante non mi riconobbe alcun merito perché avevo disegnato i gambi nella direzione sbagliata».

Nella loro saggezza, gli educatori si rendono presto conto che questo tipo di istruzione musicale si può impartire anche ai bambini molto piccoli. In effetti, se un bimbo di terza elementare non ha memorizzato perfettamente il suo giro di quinte, lo si considera una vergogna. «Prenderò un insegnante privato di musica per mio figlio. Non vuole proprio applicarsi ai suoi compiti a casa. Dice che è una noia. Se ne sta seduto a guardare fuori dalla finestra canticchiando motivetti tra sé e sé e inventandosi canzoni senza senso».

Ma è nelle classi superiori che la pressione si fa davvero forte. Gli studenti devono essere preparati per affrontare i test unificati e gli esami d'ammissione all'università. Perciò devono frequentare corsi su scale e modi, metrica, armonia e contrappunto. «Hanno una gran quantità di cose da imparare, ma finalmente all'università, quando avranno la possibilità di ascoltare tutta quella roba, apprezzeranno il duro lavoro fatto alla scuola superiore». Naturalmente, non sono molti gli studenti che decidono di concentrarsi sullo studio della musica, perciò saranno pochi ad avere l'opportunità di ascoltare i suoni che i puntini neri rappresentano. Ma è comunque importante che ogni membro della società sia in grado di riconoscere una modulazione o un passaggio fugato, indipendentemente dal fatto che ne abbia mai sentito uno. «A dir la verità, la maggior parte dei miei studenti non è molto brava in musica. In classe si annoiano, la loro preparazione è pessima e i loro compiti a casa pressoché illeggibili. Gran parte di loro se ne infischia dell'importanza della musica nel mondo d'oggi; tutto ciò che vogliono è frequentare il minor numero possibile di corsi di musica e finirla lì. Immagino che ci siano persone portate per la musica e persone che non lo sono. Però avevo un'alunna che, ve l'assicuro, era sensazionale! I suoi pentagrammi erano ineccepibili: ogni nota al posto giusto, calligrafia perfetta, diesis, bemolle; semplicemente magnifici. Un giorno diventerà una musicista coi fiocchi».

Svegliandosi madido di sudore, il musicista si rende conto con sollievo che era solo un folle sogno. «È ovvio» dice tranquillizzandosi, «nessuna società ridurrebbe una forma d'arte cosi bella e importante a una cosa tanto noiosa e insignificante; nessuna cultura potrebbe essere così crudele verso i propri figli da privarli di un mezzo di espressione umana tanto naturale e appagante. Che assurditàl»

Nel frattempo, dall'altra parte della città, un pittore si è appena svegliato da un incubo simile... Fui sorpreso di trovarmi nella classe di una scuola dell'obbligo dove non c'erano cavalletti né tubetti di tempera. «Oh, in realtà non dipingiamo fino alla scuola superiore» mi spiegarono gli scolari. «In seconda media studiamo perlopiù i colori e gli strumenti per applicarli». Mi mostrarono un foglio. Su un lato c'erano campioni di colore con degli spazi bianchi accanto. Il loro compito era scrivere negli spazi i nomi dei colori. «A me piace la pittura» osservò uno degli studenti. «Mi dicono cosa fare e io lo faccio. È facile!»

Dopo la lezione parlai con l'insegnante. «Dunque i vostri allievi non dipingono affatto?» chiesi. «Be', l'anno prossimo faranno un corso preparatorio per dipingere con i numeri: imparano che nei fogli con le figure prestampate a ogni numero corrisponde un colore ben preciso» mi rispose l'insegnante. «È propedeutico al corso principale per dipingere con i numeri che frequenteranno alla scuola superiore. In tal modo arriveranno a usare quello che hanno imparato qui e ad applicarlo a situazioni reali di attività pittorica: immergere i pennelli nella tempera, pulirne l'acquaragia, cose di questo genere. Ovviamente seguiamo i nostri studenti

in base alle loro capacità. Quelli che eccellono nella pittura - quelli che conoscono i colori e i pennelli a menadito - arrivano a dipingere un po' prima, e alcuni di loro seguono persino i corsi facoltativi per ottenere crediti per l'università. Ma prevalentemente cerchiamo di dare a questi ragazzi una buona base, affinché si rendano conto di che cosa significhi dipingere, così che quando si ritroveranno là fuori, nel mondo reale, e dovranno tinteggiare la cucina non combineranno pasticci».

«Uhm, e questi corsi di scuola superiore cui accennava...»

«Si riferisce ai corsi per dipingere con i numeri? Ultimamente stiamo assistendo a un notevole incremento di iscrizioni. Penso che si debba a quei genitori che vogliono essere sicuri che i loro figli vengano ammessi a delle buone università. Non c'è niente che faccia un'impressione migliore di un corso avanzato per dipingere con i numeri sul curriculum scolastico».

«Ma perché dovrebbe essere importante se una persona è in grado di riempire zone numerate con i colori corrispondenti?»

«Ecco, insomma, vede, dimostra un'ottima capacità di ragionamento logico. E, ovviamente, se uno studente ha intenzione di specializzarsi in una delle arti visive, come moda o decorazione d'interni, è un'ottima idea completare i requisiti relativi all'arte pittorica nella scuola superiore».

«Capisco. E quando gli studenti arrivano a dipingere liberamente, su tele bianche?»

«Lei mi sembra uno dei miei professori! Ripetevano in continuazione che dovevamo esprimere noi stessi e i nostri sentimenti e cose simili. Sa, anch'io mi sono diplomato in pittura, ma a dire il vero non ho mai lavorato molto su tele bianche. Mi limito a usare i kit per dipingere con i numeri forniti dall'amministrazione scolastica».

Purtroppo, il nostro attuale sistema di insegnamento della matematica corrisponde esattamente a questo tipo di incubo. Anzi, se io dovessi ideare un meccanismo che abbia lo scopo dichiarato di distruggere la naturale curiosità di un bambino e il suo amore per la realizzazione di forme, non riuscirei mai a fare un lavoro migliore di quello che attualmente viene fatto: non avrei l'immaginazione sufficiente por inventarmi una tale quantità di idee insensate e avvilenti che oggigiorno costituiscono l'insegnamento della matematica.

Tutti sanno che c'è qualcosa che non va. I politici sentenziano: «Abbiamo bisogno di standard più elevati». Le scuole ribattono: «Abbiamo bisogno di più denaro e di più attrezzature». I pedagogisti sostengono una tesi e gli insegnanti un'altra. Hanno tutti torto. Le uniche persone che capiscono come stanno veramente le cose sono quelle che più frequentemente vengono incolpate e quasi mai ascoltate: gli scolari. «Le lezioni di matematica sono stupide e noiose» affermano. E hanno ragione.

MATEMATICA E CULTURA

La prima cosa da chiarire è che la matematica è un'arte. La differenza tra la matematica e le altre arti, come la musica e la pittura, è che la nostra cultura non la riconosce come tale. Tutti comprendono che i poeti, i pittori e i musicisti creano delle opere d'arte e che si esprimono per mezzo di parole, immagini e suoni. In effetti la nostra società è piuttosto generosa nei riguardi delle manifestazioni di creatività: architetti, chef e persino registi televisivi sono considerati artisti. Perché, allora, non i matematici?

In parte il problema è dato dal fatto che nessuno ha la minima idea di quello che i matematici fanno. A quanto pare, l'impressione comune è che i matematici siano legati in qualche modo alla scienza: forse aiutano gli scienziati con le loro formule, o inseriscono grandi numeri nei computer per una ragione o per l'altra. Certo è che, se dovessimo dividere il mondo in «sognatori poetici» e «pensatori razionali», la maggioranza delle persone porrebbe i matematici nella seconda categoria.

Ma la verità è che non esiste nulla di più poetico e visionario, nulla di più radicale, sovversivo e psichedelico della matematica. La matematica non è meno stupefacente della cosmologia o della fisica (i matematici hanno *concepito* i buchi neri ben prima che gli astronomi ne scoprissero uno) e offre una maggiore libertà espressiva rispetto alla poesia, all'arte o alla musica (che dipendono fortemente dalle proprietà dell'universo fisico). La matematica è la più pura delle arti, e la più fraintesa.

Permettetemi dunque di tentare di spiegarvi cos'è davvero la matematica e cosa fanno i matematici. Il modo migliore per cominciare è citare l'eccellente descrizione che ne dà G. H. Hardy:

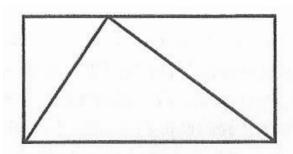
Il matematico, come il pittore e il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro, è perché sono fatte di *idee*.*

Dunque i matematici passano il tempo creando forme fatte di idee. Che genere di idee? Idee sui rinoceronti? No, quelle le lasciamo ai biologi. Idee sul linguaggio e la cultura? No, almeno non di solito. Cose di questo genere sono decisamente troppo complicate per il gusto della maggior parte dei matematici. Se mai esiste un principio estetico unificante in matematica, è questo: semplice è bello.

^{*} G. H. Hardy, Apologia di un matematico.

Ai matematici piace pensare alle cose più semplici possibili, e le cose più semplici possibili sono *immaginarie*.

Per esempio, se ho voglia di pensare a delle figure geometriche – e mi capita spesso – potrei immaginare un triangolo all'interno di un riquadro rettangolare:



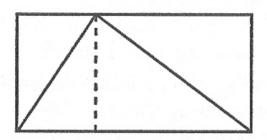
Mi chiedo quanta parte del rettangolo occupi il triangolo; due terzi, forse? Quel che è importante comprendere è che non sto parlando di questo particolare disegno di un triangolo dentro un rettangolo. Nè sto parlando di un triangolo di metallo che fa parte del sistema di travi di un ponte. Non c'è alcun fine recondito di tipo pratico in ciò che immagino. Sto semplicemente giocando. La matematica non è che questo: porsi domande, giocare, trastullarsi con la propria immaginazione. Tanto per cominciare, chiedersi quanta parte del rettangolo occupi il triangolo non ha nemmeno senso per degli oggetti fisici, reali. Anche il triangolo materiale realizzato con il massimo della cura rimane sempre un insieme irrimediabilmente complicato di atomi che si agitano, cambiando continuamente forma. A meno che non si voglia parlare di misurazioni approssimate di un qualche tipo. Ed è proprio qui che interviene l'estetica, perché quel problema non è semplice, anzi, è un problema complesso che dipende da una serie di variabili e dettagli connessi con il mondo reale. Lasciamolo agli scienziati. Il problema matematico riguarda invece un triangolo immaginario all'interno di un rettangolo immaginario. I bordi sono perfetti perché io voglio che lo siano; ed è questo il tipo di oggetti ai quali preferisco pensare. È un tema importante, in matematica: le cose sono ciò che desideriamo siano. Le scelte a nostra disposizione sono infinite, non esiste alcuna realtà a intralciarci.

D'altra parte, una volta che abbiamo compiuto le nostre scelte (per esempio, io potrei decidere di creare il mio triangolo simmetrico oppure no, allora le nostre nuove creazioni fanno quello che devono, che ci piaccia o no. È questo l'aspetto sorprendente della creazione di forme immaginarie: rispondono perfettamente! Il triangolo occupa una certa porzione del rettangolo in cui è inscritto, e io non ho alcun controllo sull'entità di quella porzione! C'è un numero che collega le due forme: forse è due terzi, forse no, non so ancora quale sia. Devo scoprirlo.

Perciò possiamo giocare e immaginare tutto ciò che vogliamo, creare forme e porci

domande su di esse. Ma come rispondiamo a queste domande? Non certo come fa la scienza. Non esistono esperimenti da compiere con provette e strumenti, o con qualcosa che dirà la verità su una creazione dell'immaginazione. L'unico modo per raggiungere la verità sulla nostra immaginazione è usare la nostra immaginazione, ed è faticoso.

Nel caso del triangolo dentro il suo rettangolo, riesco a vedere qualcosa di semplice e bello:



Se divido il rettangolo in due parti in questo modo, mi rendo conto che ciascuna di esse risulta tagliata diagonalmente a metà da uno dei lati del triangolo. Dunque lo spazio che sta all'interno del triangolo è uguale a quello che sta al suo esterno. Ciò significa che il triangolo deve occupare esattamente metà del rettangolo!

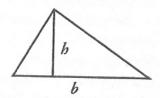
Ecco com'è fare matematica. Questo è solo un piccolo esempio di ciò in cui consiste l'arte del matematico: porsi domande semplici ed eleganti su creazioni immaginarie ed elaborare spiegazioni soddisfacenti e belle. Non esiste nulla che assomigli lontanamente a questo regno delle idee pure: è affascinante, è divertente ed è libero!

Ma da dove mi è venuta quell'idea? Come facevo a sapere di dover tracciare quella linea? Come fa un pittore a sapere dove appoggiare il suo pennello? Ispirazione, esperienza, tentativi ed errori, mera fortuna. Sta in questo, l'arte della matematica: nel creare queste piccole, stupende poesie del pensiero, questi sonetti di pura ragione. È una forma d'arte che possiede una meravigliosa capacità di trasformazione. Il rapporto fra il triangolo e il rettangolo era un mistero, e poi quell'unica linea l'ha reso palese. Non riuscivo a scorgere quel rapporto; poi, d'un tratto, ho potuto vederlo. In qualche modo, sono stato in grado di creare qualcosa di bello e profondo dal nulla e, nel farlo, di cambiare me stesso. Non è in questo che consiste l'arte?

Ecco perché è cosi sconfortante vedere ciò che si sta facendo della matematica a scuola. Questa ricca e affascinante avventura dell'immaginazione è stata ridotta a una sterile sequela di dati da memorizzare e di procedure da seguire. Invece di una domanda semplice e naturale su alcune figure, invece di un processo creativo e gratificante di invenzione e di scoperta, agli studenti viene offerto questo:

Formula dell'area di un triangolo





«L'area di un triangolo è uguale alla base per l'altezza diviso due». Agli studenti è richiesto di imparare a memoria questa formula per poi «applicarla» di continuo negli «esercizi». Addio all'eccitazione, alla gioia, persino al dolore e alla frustrazione dell'atto creativo! Non rimane nemmeno più un *problema* da risolvere. La domanda è stata formulata e nello stesso tempo è stata fornita la risposta: allo studente non rimane niente da fare.

Desidero però essere chiaro riguardo a ciò che disapprovo. Non sono contrario né alle formule né alla memorizzazione di fatti interessanti. Questo va bene all'interno di un dato contesto, e ha una sua funzione così come ha una sua funzione l'apprendimento del vocabolario: aiuta a creare opere d'arte più variegate e ricche di sfumature. Ma non è il *fatto* che i triangoli occupino metà dell'area dei rettangoli in cui sono inscritti che conta. Ciò che importa è la bella *idea* di dividerlo con quella linea, e come essa possa ispirare altre belle idee e condurre a soluzioni creative di altri problemi; qualcosa che la mera enunciazione di un fatto non potrà mai darvi. Eliminando il processo creativo per lasciare solo i suoi risultati, avrete la certezza praticamente assoluta che nessuno entrerà davvero in contatto con la disciplina. È come se mi si dicesse che Michelangelo ha creato una scultura magnifica senza darmi la possibilità di vederla. Come porrei mai trarne ispirazione? (Anzi, in realtà è molto peggio: in quel caso so quanto meno che *esiste* un'arte della scultura che mi si impedisce di apprezzare.)

Se ci si concentra sul *che cosa* e si tralascia il *perché*, la matematica si riduce a un guscio vuoto. L'arte non sta nella «verità», ma nella spiegazione, nell'argomentazione. È proprio l'argomentazione che conferisce alla verità il suo contesto e stabilisce che cosa viene effettivamente affermato e il suo significato. La matematica è *l'arte della spiegazione*. Se si nega agli studenti la possibilità di dedicarsi a questa attività - di proporre i propri quesiti, di elaborare le proprie congetture e le proprie scoperte, di sbagliare, di vedere i propri sforzi creativi frustrati, di avere un'ispirazione e di formulare con fatica le proprie spiegazioni e dimostrazioni - si nega loro la matematica stessa. Sia ben chiaro: non mi sto lamentando per la presenza di formule nelle ore scolastiche di matematica, mi sto lamentando per l'assenza della *matematica* nelle ore scolastiche di matematica.

Se il vostro insegnante d'arte vi dicesse che dipingere non è altro che riempire

delle aree numerate dove a ciascun numero corrisponde un dato colore, capireste immediatamente che nelle sue parole c'è qualcosa di sbagliato. È la cultura a dirvelo: ci sono musei e gallerie, e c'è arte anche dentro casa vostra. La società comprende bene che la pittura è un mezzo d'espressione umana. Allo stesso modo, se la vostra professoressa di scienze cercasse di convincervi del fatto che l'astronomia si occupa di predire il futuro di una persona in base alla sua data di nascita, ne concludereste che é pazza; la scienza è penetrata nella cultura a sufficienza perché quasi tutti sappiano che cosa sono gli atomi, le galassie e le leggi della natura. Ma se il prof di matematica vi fa intendere, esplicitamente o dandolo per scontato, che la matematica non è altro che una sequenza di formule e definizioni e di algoritmi da memorizzare, chi vi farà capire che non è affatto cosi?

Questo problema culturale è un mostro che si autoalimenta: gli studenti imparano che cos'è la matematica dai loro insegnanti, i quali lo hanno imparato dai loro insegnanti, così che questa mancanza di comprensione e di apprezzamento della matematica nella nostra cultura si riproduce all'infinito. Peggio ancora, la perpetuazione di questa «pseudomatematica», questa enfasi posta sulla precisa ma meccanica manipolazione di simboli, crea una propria subcultura e un proprio ordine di valori. Gli adepti di tale pseudomatematica traggono soddisfazione dai propri successi e l'ultima cosa che vogliono sentirsi dire è che la matematica è pura creatività e sensibilità estetica. Non pochi studenti laureati hanno mollato tutto quando hanno scoperto, dopo che per un decennio era stato ripetuto loro che erano «bravi in matematica», di non avere in realtà alcun vero talento matematico ma di essere solo bravi a eseguire le istruzioni. La matematica non significa eseguire delle istruzioni: vuol dire creare istruzioni nuove.

E non ho nemmeno accennato all'assenza totale di una critica matematica nella scuola. Agli studenti non viene mai rivelato il segreto che la matematica, come ogni letteratura, è creata dagli uomini per il proprio diletto; che le opere di matematica sono soggette a una valutazione critica; che è possibile avere e sviluppare un *gusto* matematico. Un brano di matematica è come una poesia, e possiamo chiederci se soddisfa i nostri criteri estetici: l'argomentazione è fondata? Ha un senso? È semplice ed elegante? Mi avvicina al cuore della questione? È ovvio che a scuola non si faccia alcuna critica matematica: come si fa a esprimere un giudizio critico su un'arte che non si pratica?

Perché non vogliamo che i nostri figli imparino a fare matematica? Forse perché non crediamo in loro? Perché pensiamo che sia troppo difficile? A quanto pare però riteniamo che siano in grado di elaborare riflessioni e raggiungere le proprie conclusioni su Napoleone. Perché non possono farlo sui triangoli? Io penso che dipenda semplicemente dal fatto che la nostra civiltà ignora che cosa davvero sia tale disciplina. L'impressione che ci viene impartita è di qualcosa di molto freddo e fortemente tecnico, di qualcosa che nessuno potrebbe davvero comprendere; e questa è la più classica delle profezie che si autoavverano.

Sarebbe già abbastanza triste se la cultura fosse semplicemente digiuna di matematica, ma quel che è molto peggio è che la gente è convinta di sapere di che cosa si occupa la matematica, ed evidentemente è vittima del grossolano errore di ritenere che la matematica sia in qualche modo utile alla società! Questo fraintendimento costituisce l'enorme differenza che esiste tra la matematica e le altre arti. La società considera la matematica come uno strumento in qualche modo al servizio della scienza e della tecnologia. Tutti sanno che la poesia e la musica servono solo per il puro godimento, e per elevare e nobilitare l'animo umano (ecco perché sono state praticamente eliminate dal programma della scuola pubblica), ma la matematica no, la matematica è importante.

SIMPLICIO: Stai davvero cercando di sostenere che la matematica non fornisce applicazioni pratiche o utili alla società?

SALVIATI: Ovviamente no. Sto semplicemente suggerendo che il fatto che qualcosa abbia delle conseguenze pratiche non significa che si riduca a *questo*. La musica può guidare gli eserciti in battaglia, ma non è per questo motivo che la gente compone sinfonie. Michelangelo decorò un soffitto, ma sono sicuro che aveva in mente cose più elevate.

SIMPLICIO: Ma non abbiamo bisogno che le persone imparino quelle conseguenze pratiche della matematica? Non abbiamo bisogno di contabili e di carpentieri?

SALVIATI: Quante persone usano realmente una parte qualsiasi di questa «matematica pratica» che in teoria hanno imparato a scuola? Pensi che i carpentieri si servano della trigonometria nel loro lavoro? Quanti adulti si ricordano come si dividono le frazioni o come si risolve un'equazione di secondo grado? È evidente che l'attuale programma di preparazione pratica non funziona, e per un buon motivo: è di una noia atroce, e comunque nessuno se ne serve mai. E allora perché la gente pensa che sia così importante? Non vedo che cosa porti di buono alla società avere i suoi membri che se ne vanno in giro con vaghi ricordi di formule algebriche e di figure geometriche, accompagnati alla consapevolezza di averle odiate. Potrebbe giovare loro, invece, mostrar loro qualcosa di bello e dar loro un'opportunità di godere del fatto di essere pensatori creativi, flessibili, di mente aperta, che è poi quello che una *vera* educazione matematica potrebbe offrire.

SIMPLICIO: Ma le persone devono essere in grado di far quadrare i loro conti, lo ammetterai!

SALVIATI: Sono certo che gran parte della gente usa una calcolatrice per l'aritmetica quotidiana. E perché non dovrebbe? È sicuramente più facile e sicuro. Io sostengo, però, che il sistema attuale è terribile, mentre ciò che manca è meraviglioso. La matematica dovrebbe essere insegnata come arte per l'arte. Questi banali aspetti «utili» ne seguirebbero come un insignificante sottoprodotto. Beethoven non avrebbe avuto alcuna difficoltà a comporre un jingle pubblicitario, ma la motivazione che lo spinse a studiare la musica era di creare magnifiche armonie.

SIMPLICIO: Ma non tutti sono tagliati per essere artisti. Prendi i bambini che non hanno il «pallino della matematica», per esempio. Come farebbero a entrare nel tuo schema?

SALVIATI: Se la matematica fosse proposta a ognuno nel suo stato naturale, con tutto il divertimento e le sorprese stimolanti che porta con sé, penso che assisteremmo a un cambiamento drastico tanto nell'atteggiamento degli studenti nei confronti di questa materia, quanto del significato che diamo all'essere bravi in matematica. Stiamo perdendo tantissimi potenziali matematici dotati, persone creative e intelligenti che giustamente rigettano quella che sembra una materia inutile e sterile. Sono troppo in gamba per perdere tempo con simili stupidaggini. SIMPLICIO: Ma non pensi che se l'ora di matematica fosse resa più simile all'ora d'arte, moltissimi ragazzi non imparerebbero nulla?

SALVIATI: Non imparano nulla adesso! Piuttosto è meglio non avere le ore di matematica, che fare quello che si fa attualmente. Almeno qualcuno avrebbe l'opportunità di scoprire qualcosa di bello per conto proprio.

SIMPLICIO: Dunque elimineresti la matematica dal programma scolastico?

SALVIATI: È già stata eliminata! Resta da chiedersi che cosa fare dell'insulso guscio vuoto che ci rimane. È ovvio che io vorrei sostituirlo con un impegno attivo e gioioso con le idee matematiche.

SIMPLICIO: Ma quanti insegnanti di matematica hanno una conoscenza sufficiente della propria materia per insegnarla in quel modo?

SALVIATI: Pochissimi. E questa è solo la punta dell'iceberg...

LA MATEMATICA A SCUOLA

Non esiste modo più sicuro di uccidere l'entusiasmo e l'interesse per una materia che renderla obbligatoria nel programma scolastico. Basta inserirla come parte fondamentale di un test di verifica unificato per avere praticamente la certezza che il sistema scolastico la svuoterà della vita. I comitati scolastici non capiscono che cos'è la matematica; né lo capiscono i pedagogisti, gli autori di manuali, le case editrici e, purtroppo, nemmeno la gran parte dei nostri docenti di matematica. La portata del problema è così gigantesca che faccio fatica a decidere da dove cominciare.

Proviamo a partire dal fiasco della «riforma matematica». Da molti anni si è raggiunta la consapevolezza che nell'insegnamento di questa materia qualcosa non funzioni. Sono stati commissionati studi, organizzate conferenze, costituiti innumerevoli comitati di insegnanti, editori scolastici ed educatori (qualsiasi cosa siano) per «porre rimedio al problema». Tralasciando per un momento i meri interessi commerciali che l'industria editoriale manifesta per la riforma scolastica (che approfitta di ogni minima fluttuazione politica per offrire «nuove» edizioni delle sue illeggibili mostruosità), l'intero movimento riformistico non ha mai colto in pieno l'essenza del problema. Il programma scolastico di matematica non va semplicemente modificato: va eliminato.

Tutto quell'agitarsi e disquisire su quali «argomenti» si dovrebbero insegnare e in quale ordine, o sull'uso di questa notazione piuttosto che di quella, o su quale marca e modello di calcolatrice adottare, è come voler sistemare ossessivamente le sedie a sdraio sul ponte del *Titanie*! La matematica è *la musica della ragione*. Fare matematica significa impegnarsi in un atto di scoperta e ipotesi, di intuizione e ispirazione; significa essere in uno stato di confusione, non perché non ci trovate alcun senso, ma perché le *avete dato* un senso e non capite ancora a che cosa serva la vostra creazione; significa avere un'idea; provare la frustrazione di un'artista; sentirsi sopraffatti e sgomenti di fronte a una bellezza quasi dolorosa; significa sentirsi *vivi*, maledizione! Togliete questo alla matematica e potrete fare tutte le conferenze che volete; non cambierà nulla. Intervenite pure come volete, cari dottori: *il vostro paziente è già morto*.

La parte più triste di tutta questa «riforma» sono i tentativi di «rendere la matematica interessante» e «rilevante per la vita dei ragazzi». Non c'è bisogno di *rendere* la matematica interessante: è già più interessante di quanto potremmo mai renderla! E la sua bellezza consiste proprio nella sua totale irrilevanza per la nostra vita. Ecco perché è così divertente.

I tentativi di presentare la matematica come rilevante per la vita quotidiana risultano inevitabilmente forzati e artefatti: «Vedete, ragazzi, se conoscete l'algebra potete calcolare quanti anni ha Maria sapendo che ha due anni più del doppio dell'età che aveva sette anni fal». (Come se capitasse spesso di avere accesso a questo genere di informazioni invece che sapere direttamente l'età della fanciulla.) L'algebra non riguarda la vita quotidiana, riguarda numeri e simmetria; e ciò rappresenta di per sé un'occupazione valida:

Supponete che vi siano date la somma e la differenza di due numeri. Come è possibile stabilire quali sono i due numeri?

Ecco un problema semplice ed elegante, e non è necessario alcuno sforzo per renderlo attraente. Gli antichi babilonesi si divertivano a riflettere su questo genere di problemi, e lo stesso potrebbe valere per i nostri studenti. (E spero che anche voi vi divertiate a pensarci!) Non abbiamo bisogno di farci in quattro per dare rilevanza alla matematica, poiché ne ha esattamente quanto qualsiasi altra arte, essendo un'esperienza umana significativa.

Ma a parte questo, pensate davvero che i ragazzi vogliano qualcosa che sia rilevante per la loro vita quotidiana? Pensate che qualcosa di pratico li faccia appassionare? Alla gente piace la fantasia, ed è questo che la matematica può dare: un diversivo dalla vita quotidiana, un palliativo al mondo reale di ogni giorno.

Un problema analogo si presenta quando gli insegnanti o i manuali cedono alla tentazione di una sdolcinatezza forzata. Nel tentativo di combattere la cosiddetta «ansia da matematica» (uno dei tantissimi disagi che in realtà sono provocati dalla scuola), si cerca di farla apparire «amichevole». Alcuni docenti, per aiutare i loro studenti a memorizzare le formule per calcolare l'area del cerchio o il volume della sfera insegnano loro delle filastrocche («Il volume della sfera qual è? Quattro terzi pi greco erre trel») o si inventano storielle divertenti. Ma che ne è della vera storia? La storia degli sforzi che l'umanità ha dedicato al problema della misurazione delle curve; la storia di Eudosso, di Archimede e del metodo di esaustione; la storia della trascendenza di pi greco? Che cos'è più interessante, misurare le dimensioni approssimative di una porzione circolare di carta millimetrata usando una formula che qualcuno vi ha propinato senza fornirvi spiegazioni (e che vi ha costretto a memorizzare e ad applicare innumerevoli volte), o apprendere le vicende relative a uno dei quesiti più belli e affascinanti e a una delle idee più brillanti e straordinarie della storia dell'umanità? Stiamo uccidendo l'interesse dei giovani per i cerchi e le sfere, maledizione!

Perché non insegniamo ai nostri studenti queste cose? E perché non diamo loro la possibilità di fare effettivamente della matematica e di elaborare le proprie idee, le proprie considerazioni e le proprie reazioni? Quale altra materia viene insegnata senza alcun riferimento alla sua storia, alla sua filosofia, al suo sviluppo tematico, ai suoi criteri estetici, al suo stato attuale? In quale altra materia si evitano le fonti

primarie - magnifiche opere d'arte realizzate da alcune delle menti più creative mai esistite - per sostituirle con le versioni imbastardite di manuali di terza categoria?

Il problema fondamentale della matematica scolastica è che non contempla *problemi*. Oh, conosco bene quelli che *vengono spacciati* per problemi durante l'ora di matematica, conosco quegli «esercizi» insipidi. «Questo è una tipologia di problema, e questo è il modo per risolverlo. Sì, sarà inserito nella verifica. Per casa fate gli esercizi dispari dall'uno al trentacinque». Che modo triste di imparare la matematica: gli studenti si riducono a essere delle scimmie ammaestrate.

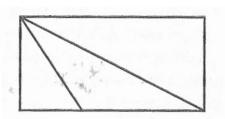
Ma un problema, un *quesito* autentico, lineare, genuino, umano, è tutta un'altra cosa. Quanto è lunga la diagonale di un cubo? I numeri primi non finiscono mai? L'infinito è un numero? In quanti modi posso ricoprire una superficie con piastrelle simmetriche? La storia della matematica è la storia dell'umanità che si scontra con quesiti come questi, non il vacuo rigurgito di formule e algoritmi (insieme a esercizi artificiosi ideati per poter far uso di quelle formule e di quegli algoritmi).

Un buon problema è qualcosa che non si sa come risolvere. È questo che ne fa un valido enigma, e una valida opportunità. Un buon problema non rimane isolato, ma funge da trampolino per altri quesiti interessanti. Un triangolo occupa metà del rettangolo che lo contiene. E quanto spazio occupa una piramide del parallelepipedo che lo contiene? Possiamo affrontare questo problema in maniera analoga?

Posso capire l'idea di preparare gli scolari a padroneggiare alcune tecniche, anch'io lo faccio. Ma non in maniera fine a se stessa. In matematica, così come in qualsiasi arte, la tecnica andrebbe imparata all'interno del suo contesto. I grandi problemi, la loro storia, il processo creativo: è questo lo scenario appropriato. Date ai vostri studenti un buon problema, lasciate che si sforzino di risolverlo, che si sentano frustrati. Osservate quello che riescono a inventarsi. Aspettate finché il loro desiderio di trovare un'idea non si fa insopportabile, e *allora* fornite loro qualche strumento. Ma non troppi.

Perciò accantonate le vostre lezioni programmate e le vostre lavagne luminose, quegli abominevoli libri di testo a colori, i cd-rom e tutto il resto di quel baraccone ambulante che è il sistema educativo contemporaneo, e fate matematica insieme ai vostri studenti! Gli insegnanti d'arte non sprecano tempo con inutili libri di testo e con l'apprendimento meccanico di tecniche specifiche. Si limitano a ciò che è naturale per la materia che insegnano: fanno dipingere i ragazzi. Si agitano tra i cavalletti dando suggerimenti e offrendo consigli.

STUDENTE: Stavo pensando al nostro problema del triangolo, e ho notato una cosa. Se il triangolo è molto inclinato, allora *non* occupa metà del rettangolo in cui è iscritto. Ecco, guardi:



INSEGNANTE: Eccellente osservazione! Nel nostro ragionamento sulla divisione del triangolo abbiamo ipotizzato che il suo vertice si trovi sulla base. Adesso abbiamo bisogno di una nuova idea.

STUDENTE: Devo provare a dividerlo in un altro modo?

INSEGNANTE: Certo. Prova a sviluppare diverse idee. Fammi vedere che cosa riesci a scoprire!

Dunque, come dobbiamo insegnare ai nostri allievi a fare matematica? Scegliendo problemi stimolanti e artificiosi che siano adatti ai loro gusti, alle loro personalità e al loro grado di esperienza. Dando loro il tempo di fare scoperte e formulare ipotesi, aiutandoli a perfezionare le loro argomentazioni e creando un'atmosfera di sana e vibrante critica matematica, mantenendoci flessibili e disponibili a cambiare bruscamente direzione per andare dove la loro curiosità potrebbe condurre. In buona sostanza: avendo un rapporto intellettuale onesto con i nostri studenti e con la nostra materia.

Naturalmente quello che sto suggerendo é impossibile per diversi motivi. Tralasciando il fatto che i programmi scolastici statali e i test unificati azzerano completamente l'autonomia individuale degli insegnanti, dubito che gran parte di loro desideri sinceramente avere un rapporto così intenso con i propri studenti, poiché comporterebbe troppa vulnerabilità e troppa responsabilità; in sintesi, troppo lavoro!

È molto più facile essere un canale passivo che propina acriticamente i «materiali» forniti dagli editori e seguire a pappagallo le istruzioni per le lezioni, le verifiche e le ripetizioni, piuttosto che pensare in maniera profonda e ponderata al significato della materia che s'insegna e a quale sia il modo migliore per trasmettere quel significato direttamente e onestamente ai propri studenti. Veniamo incoraggiati a rinunciare al difficile compito di prendere decisioni basate sulla nostra saggezza e sulla nostra coscienza individuali, e a seguire il programma. È, semplicemente, la strada meno impegnativa:

GLI EDITORI DI LIBRI DI TESTO STANNO AGLI INSEGNANTI COME

- A) le industrie farmaceutiche stanno ai medici
- B) le etichette musicali stanno ai disc jockey
- C) le multinazionali stanno ai parlamentari
- D) tutti i suddetti

La matematica, come la pittura o la poesia, è un *faticoso lavoro creativo*, il che rende molto difficile insegnarla. La matematica è un lento processo contemplativo. Ci vuole tempo per produrre un'opera d'arte, e ci vuole un insegnante preparato per riconoscerla. Ovviamente è più facile esporre una serie di regole che fare da guida a degli aspiranti giovani artisti, ed è più facile scrivere il manuale d'istruzioni di un videoregistratore che non un vero libro in cui si esprime un punto di vista personale.

La matematica è un'arte, e l'arte dovrebbe essere insegnata da chi fa l'artista, o almeno da qualcuno che apprezzi la forma artistica e sia in grado di riconoscerla quando la incontra. Non è necessario imparare la musica da un compositore professionista, ma nessuno vorrebbe che il proprio figlio andasse a lezione da una persona che non suona nemmeno uno strumento e non ha mai ascoltato un brano musicale in vita sua. Accettereste come docente d'arte una persona che non ha mai preso in mano una matita o messo piede in un museo? E allora perché mai accettiamo insegnanti di matematica che non hanno mai prodotto della matematica originale, non sanno nulla della storia e della filosofia della materia, nulla dei suoi sviluppi recenti? Ed è proprio questo nulla che insegnano ai loro allievi. Ma come si fa? Come si può insegnare qualcosa che non si conosce? Io non so ballare, e di conseguenza non mi sognerei mai di tenere un corso di ballo (potrei provarci, ma sarebbe un vero disastro). La differenza é che io so di non saper ballare. Nessuno mi viene a dire che sono bravo a ballare solo perché conosco qualche termine relativo alla danza.

Non sto dicendo che gli insegnanti di matematica debbano essere matematici professionisti, lungi da me. Ma non dovrebbero quanto meno comprendere che cos'é la matematica, essere degli esperti e divertirsi a fare il loro lavoro?

Se l'insegnamento si riduce a una mera trasmissione di dati che non comunica entusiasmo né meraviglia, se i docenti sono contenitori passivi di informazioni e non creatori di nuove idee, che speranze ci sono per i loro studenti? Se per l'insegnante la somma di frazioni é un insieme di regole arbitrarie e non l'esito di un processo creativo e il risultato di scelte estetiche e di desideri, allora i poveri studenti ovviamente ne ricaveranno la stessa percezione.

Insegnare non significa fornire informazioni. Vuol dire avere un rapporto intellettuale onesto con i propri allievi. Non richiede metodi, né strumenti, né una preparazione specifica, ma solo la capacità di essere autentici. E, se non si é in grado di essere autentici, non si ha il diritto di disturbare dei ragazzini innocenti con la propria incapacità.

In particolare *non si può insegnare a insegnare*, come pretendono le scuole psicopedagogiche. Certo, si possono seguire lezioni sulla psicologia nell'età evolutiva o imparare come usare «efficacemente» una lavagna e come preparare e organizzare un piano per la lezione (il che, per inciso, garantisce che la vostra lezione sarà *pianificata*, e dunque falsa), ma non sarete mai un autentico insegnante se non

siete disposti a essere una persona genuina. Insegnamento significa franchezza e onestà, e la capacità di comunicare entusiasmo e amore per l'apprendimento. Senza queste caratteristiche, tutti i diplomi di pedagogia del mondo non vi serviranno a nulla, saranno totalmente superflui.

È semplicissimo. Gli studenti non sono degli alieni. Reagiscono alla bellezza e alla forma, e, come tutti, sono dotati di una naturale curiosità. Parlate con loro e, cosa più importante, ascoltateli!

SIMPLICIO: D'accordo, capisco che c'è un'arte nella matematica e che non stiamo facendo un buon lavoro nel farla conoscere. Ma non rischiamo di pretendere qualcosa di troppo esoterico e intellettuale dal nostro sistema scolastico? Noi non stiamo cercando di creare dei filosofi, vogliamo semplicemente che le persone abbiano una ragionevole padronanza dell'aritmetica elementare in modo che siano in grado di operare nella società.

SALVIATI: Ma questo non è vero! La matematica scolastica si occupa di molte cose che non hanno niente a che vedere con la capacità di cavarsela nella società, come l'algebra e la trigonometria, per esempio. Tali studi sono totalmente irrilevanti per la vita quotidiana. Sto semplicemente suggerendo che, se proprio vogliamo inserire cose di questo genere nell'istruzione di base della maggioranza degli studenti, allora dovremmo farlo in modo organico e naturale. Inoltre, come ho già detto, il fatto che una materia di studio abbia alcune applicazioni pratiche banali non significa che dobbiamo fare di quelle applicazioni il punto focale del nostro insegnamento e del nostro apprendimento. È vero che bisogna saper leggere per poter compilare un modulo alla motorizzazione, ma non è questa la ragione per cui insegniamo ai bambini a leggere. Insegniamo loro a leggere per lo scopo più elevato di permettere che accedano a idee belle e significative. Non solo sarebbe crudele insegnare a leggere in quel modo - costringendo i bambini di terza elementare a compilare ordini d'acquisto e moduli delle imposte - ma non funzionerebbe. Impariamo le cose perché ci interessano adesso, non perché potrebbero tornarci utili in futuro. Eppure è proprio questo che chiediamo ai bambini di fare nel caso della matematica.

SIMPLICIO: Ma non è necessario che in terza elementare i nostri bambini imparino l'aritmetica?

SALVIATI: E perché? Vuoi insegnar loro a calcolare 427 più 389? Non è una domanda che molti bambini di otto anni si pongono. Rifletti: la gran parte degli *adulti* non comprende appieno l'utilità pratica dell'aritmetica decimale, e ti aspetti che i bimbi di terza elementare ne abbiano un'idea chiara? Oppure non t'importa che la comprendano? La verità è che è troppo presto, per questo genere di preparazione tecnica. Naturalmente gliela si può insegnare, ma ritengo che tutto considerato faccia più male che bene. È molto meglio aspettare finché non si manifesterà la loro naturale curiosità per i numeri.

SIMPLICIO: Ma allora che cosa dovremno fare con i bambini durante l'ora di matematica?

SALVIATI: Giocare! Insegnar loro a giocare a scacchi e a Go, a Hex e a backgammon, a sprout e a nim. Inventare un gioco. Fare dei puzzle. Proporre situazioni in cui è necessario un ragionamento deduttivo. Non preoccuparsi di notazioni e tecniche, ma aiutarli a diventare pensatori matematici attivi e creativi.

SIMPLICIO: Ho l'impressione che correremmo il brutto rischio di ritrovarci degli scolari che non sono in grado di fare le somme e le sottrazioni.

SALVIATI: Credo che un rischio di gran lunga maggiore sia quello di creare scuole prive di ogni genere di espressione creativa, in cui il compito dello studente è memorizzare date, formule ed elenchi di parole per poi rigurgitarli nei test unificati, allo scopo di «preparare oggi la forza lavoro di domani».

SIMPLICIO: Ma c'è sicuramente un corpus di fatti matematici di cui una persona istruita dovrebbe essere a conoscenza.

SALVIATI: Si, e il più importante di questi fatti è che la matematica è una forma d'arte cui l'uomo si dedica per trarne piacere! D'accordo, è vero che sarebbe bello se la gente conoscesse alcune nozioni fondamentali su numeri e figure, ma ciò non si otterrà mai con la memorizzazione meccanica, le applicazioni ripetitive, le lezioni e gli esercizi. Le cose si imparano facendole, e ci si ricorda di quelle per cui si prova un interesse. Milioni di adulti sono in grado di ripetere a pappagallo «meno b più o meno la radice quadrata di b quadro meno 4ac, tutto diviso per 2a» e non hanno la benché minima idea di ciò che significa, poiché non è mai stata data loro la possibilità di scoprire o ideare cose simili da soli. Non hanno mai avuto un problema impegnativo su cui ragionare, che li facesse sentire frustrati e che producesse in loro il desiderio di apprendere tecniche e metodi. Nessuno gli ha mai raccontato la storia del rapporto dell'uomo con i numeri: niente sulle tavolette di problemi degli antichi babilonesi, niente sul papiro di Rhind, sul Liber abaci, sull'Ars Magna, e, soprattutto, non hanno avuto alcuna possibilità di incuriosirsi su un quesito: la risposta è stata data prima ancora che potessero porselo.

SIMPLICIO: Ma non abbiamo il tempo per permettere che ogni scolaro inventi la sua matematica! Ci sono voluti secoli perché si scoprisse il teorema di Pitagora. Come puoi pretendere che un bambino normale lo faccia?

SALVIATI: Non lo pretendo. Voglio essere chiaro al riguardo. Ciò di cui mi sto lamentando è l'assenza totale d'arte e invenzione, di storia. e filosofia, di contesto e prospettiva nel programma scolastico di matematica. Questo non significa che le notazioni, le tecniche e lo sviluppo di una base di conoscenze non debbano avere uno spazio. È ovvio che devono averlo. Dovremmo avere gli uni e gli altri. Se contesto il fatto che il pendolo oscilli troppo da un lato, non significa che voglia che oscilli totalmente dall'altro. Ma il fatto è che le persone imparano meglio quando dal processo scaturisce un prodotto. Non si diventa poeti imparando a memoria una serie di poesie, ma componendone di proprie.

SIMPLICIO: Sì, ma prima di poter scrivere le proprie poesie bisogna imparare l'alfabeto. Il processo deve pur cominciare da qualche parte. Si deve imparare a camminare, prima di poter correre.

SALVIATI: No, ciò che devi avere è qualcosa *verso* cui correre. I bambini possono scrivere poesie e storie *mentre* imparano a leggere e a scrivere. Un brano scritto da un bimbo di sei anni è una cosa meravigliosa, e gli errori di ortografia e di punteggiatura non ne sminuiscono la bellezza. Anche i bambini più piccoli possono inventare delle canzoni, eppure non hanno la minima idea della tonalità o della metrica che stanno usando.

SIMPLICIO: Ma la matematica non è diversa? Non è un linguaggio in sé, con dei simboli che vanno imparati prima di poterlo utilizzare?

SALVIATI: Nient'affatto. La matematica non è un linguaggio, è un'avventura. I musicisti parlano forse un'altra lingua solo perché scelgono di abbreviare le loro idee utilizzando dei puntini neri? Ma il bambino che inventa la sua canzone se ne frega della partitura musicale. È vero, nel corso dei secoli è stata elaborata una certa quantità di abbreviazioni matematiche; ma questo non è per nulla fondamentale. La matematica si fa in buona parte insieme a un amico davanti a una tazza di caffè, scarabocchiando grafici su un tovagliolo. Essa riguarda e ha sempre riguardato le idee, e un'idea valida trascende i simboli con cui si sceglie di esprimerla. Come disse una volta Carl Friedrich Gauss: «Ciò di cui abbiamo bisogno sono nozioni, non notazioni».

SIMPLICIO: Ma uno degli scopi della matematica non è di aiutare gli studenti a pensare in maniera più precisa e logica, e di sviluppare le loro capacità di ragionamento qualitativo? Tutte queste definizioni e formule non affinano la mente dei nostri studenti?

SALVIATI: No, non è così. Casomai, il sistema attuale ha l'effetto di ottundere la mente. È risolvendo i problemi per conto proprio che si affina la mente, non facendosi dire come risolverli.

SIMPLICIO: D'accordo. Ma che cosa mi dici di quegli studenti che vogliono seguire una carriera scientifica o ingegneristica? Non hanno bisogno della preparazione che fornisce il curriculum tradizionale? Non è per questo che insegniamo la matematica a scuola?

SALVIATI: Quanti studenti che seguono lezioni di letteratura diventeranno scrittori? Non è questa la ragione per cui insegniamo letteratura, nè quella per cui gli studenti la imparano. Insegniamo per illuminare le menti di tutti, non per preparare i futuri professionisti. E, in ogni caso, la capacità più preziosa per uno scienziato o per un ingegnere è quella di essere in grado di pensare in modo creativo e indipendente. L' ultima cosa di cui chiunque abbia bisogno è di venir *preparato*.

IL PROGRAMMA SCOLASTICO DI MATEMATICA

L'aspetto davvero penoso del modo in cui la matematica viene insegnata a scuola non è ciò che manca - il fatto che nell'ora di matematica non ci sia vera matematica - ma quello che c'è al suo posto: una massa confusa di disinformazione distruttiva che prende il nome di «programma di matematica». È giunto il momento di dare un'occhiata più da vicino a ciò che i nostri studenti sono costretti ad affrontare, a quello cui vengono sottoposti in nome di questa materia e al modo in cui ne subiscono un danno.

L'aspetto più evidente di questo cosiddetto «programma di matematica» è la sua rigidità. Ciò è particolarmente vero negli ultimi anni di scuola. In ogni scuola, in ogni città, in ogni Stato, vengono dette e fatte le stesse cose precisamente nello stesso modo e nell'identico ordine. Lungi dal farsi turbare da questa situazione orwelliana, la maggior parte delle persone ha accettato tale modello standard di curriculum matematico come sinonimo della matematica stessa.

Ciò è strettamente collegato a quello che io chiamo il «mito della scala a pioli», l'idea secondo cui la matematica può essere ordinata come una sequenza di «argomenti» in cui ciascuno di essi è in qualche misura più avanzato o «alto» di quello che lo precede. L'effetto è quello di trasformare la matematica scolastica in una corsa in cui alcuni studenti sono «avanti» rispetto ad altri e i genitori si preoccupano che i loro figli possano «rimanere indietro». E dove conduce questa gara? Che cosa ci aspetta al traguardo? È una ben triste corsa che non porta da nessuna parte. Alla fine ci si ritroverà defraudati di un'educazione matematica senza nemmeno saperlo.

La vera matematica non è preconfezionata: non esiste una cosa come un'idea di Algebra II. Non si può stabilire dove condurrà un problema. L'arte non é una corsa. Il mito della scala a pioli è un'immagine falsa, e il percorso compiuto da un insegnante attraverso il programma standard rafforza il mito, impedendogli di vedere la matematica come un tutt'uno organico. Di conseguenza, ci ritroviamo con un programma privo di una prospettiva storica o di una coerenza tematica, una raccolta frammentaria di argomenti e tecniche assortiti, uniti solo dalla facilità con cui possono essere ridotti a procedure da seguire passo passo.

Al posto della scoperta e dell'esplorazione, abbiamo regole e norme. Non sentiamo mai uno studente affermare: «Volevo vedere se aveva senso elevare un numero a una potenza negativa e ho scoperto che se si decide che sta a indicare l'inverso si ottiene uno schema davvero elegante». Invece, docenti e libri di testo

presentano la «regola dell'esponente negativo» come un fatto compiuto, senza far menzione dell'estetica che sta dietro questa scelta, o neanche del fatto che sia una scelta.

Al posto di problemi profondi, che potrebbero portare a una sintesi di idee diverse, a territori inesplorati di disamina e dibattito e alla percezione di un'unità tematica e di un'armonia all'interno della matematica, abbiamo invece tristi esercizi ridondanti, che si riferiscono specificamente alla tecnica in esame, e sono così sconnessi gli uni dagli altri e dalla matematica nel suo complesso che né lo studente né l'insegnante hanno la più pallida idea del come e del perché una cosa di quel genere sia emersa.

Al posto del contesto naturale di un problema, in cui gli alunni possono prendere decisioni su quale sia il significato che desiderano dare ai termini che utilizzano e su quali concetti vorrebbero codificare, gli studenti sono sottoposti a una sequela senza fine di immotivate definizioni a priori. Nel programma c'è un'ossessione per il gergo e per la nomenclatura, apparentemente al solo scopo di fornire agli insegnanti qualcosa con cui sottoporre a verifica gli studenti. Nessun matematico al mondo si prenderebbe la briga di fare la seguente distinzione senza senso: 2 + 1/2 è un «numero misto», mentre 5/2 è una «frazione impropria». Per tutti i diavoli: sono *uguali*! Sono esattamente gli stessi numeri e hanno esattamente le stesse proprietà. Chi mai usa questi termini al di fuori della quarta elementare?

Naturalmente è di gran lunga più facile verificare se gli studenti conoscono una definizione priva di significato che non stimolarli a creare qualcosa di bello e a scoprirne il significato da sé. Anche se concordiamo sul fatto che l'esistenza di una terminologia comune è importante in matematica, questa non è una terminologia comune. Com'è triste che ai bimbi di quinta elementare si insegni a dire «quadrilatero» invece di «figura con quattro lati», ma non si dia mai loro un motivo per usare termini come «congettura» o «controesempio». Gli studenti delle superiori devono imparare a usare la funzione secante, sec x, come abbreviazione dell'inverso della funzione coseno, $1/\cos x$ (una definizione che ha lo stesso peso intellettuale della decisione di utilizzare il simbolo & al posto della congiunzione «e»). Il fatto che questa specifica abbreviazione, un residuato delle tavole nautiche del Quindicesimo secolo, sia ancora in uso (mentre altre, come «senoverso», sono scomparse) è un mero accidente della storia, e il suo utilizzo ha perso ogni valore in un'epoca in cui fare calcoli rapidi e precisi a bordo di una nave non è più un problema. In tal modo non facciamo che ingombrare le nostre lezioni di matematica con un'inutile terminologia fine a se stessa.

In sostanza, il programma di matematica non è nemmeno una sequenza di argomenti e idee, quanto piuttosto una sequenza di notazioni. Sembra che la matematica consista in un elenco segreto di simboli mistici e di regole per la loro manipolazione. Ai bambini più piccoli si danno simboli come + e :. Solo più avanti si può affidar loro $\sqrt{}$, e poi x e y e l'alchimia delle parentesi. Alla fine verranno

indottrinati all'uso di sen, \log , f(x) e, se ne sono giudicati degni, di d e \int . Il tutto senza che abbiano avuto una sola esperienza matematica significativa.

Questo programma è stabilito in maniera tanto rigida che gli insegnanti e gli autori dei libri di testo sono in grado di fare previsioni attendibili, con anni d'anticipo, su ciò che gli studenti faranno; previsioni così esatte da arrivare fino alla pagina degli esercizi svolti. Non è affatto infrequente che a uno studente al secondo anno di algebra si richieda di calcolare [f(x+h)-f(x)]/h per diverse funzioni f di modo che avranno già «visto» quella formula quando seguiranno le lezioni di analisi matematica qualche anno più tardi. Naturalmente non viene fornita alcuna motivazione (né ce la si aspetta) del perché una tale combinazione apparentemente casuale di operazioni debba rivestire un qualche interesse, anche se sono sicuro che molti insegnanti tentino di spiegare che cosa potrebbe significare la formula, e pensano di fare un favore ai loro studenti, quando in realtà per questi è soltanto un altro noioso problema di cui sbarazzarsi. «Che cosa vogliono che faccia? Ah, basta che applichi la formula? D'accordo.»

Un altro esempio è il modo in cui gli studenti vengono addestrati a esprimere le informazioni in una forma inutilmente complicata soltanto perché in un futuro lontano acquisteranno significato. C'è qualche insegnante di algebra della scuola media che abbia la minima idea del perché chiede ai suoi studenti di riformulare la frase «il numero x è compreso tra tre e sette» come |x-5| < 2? Gli autori di libri scolastici, nella loro irreparabile incompetenza, credono davvero di aiutare gli allievi preparandoli per il giorno in cui forse, anni dopo, potrebbero trovarsi a operare nell'ambito di una geometria multidimensionale o di uno spazio metrico astratto? Ne dubito. Suppongo che si copino semplicemente l'un l'altro di decennio in decennio, cambiando forse lo stile o il colore dei caratteri, e che siano raggianti d'orgoglio quando il sistema scolastico adotta il loro manuale facendosi così loro complice involontario.

La matematica si occupa di problemi, e bisogna fare in modo che i problemi siano il centro d'interesse della vita matematica degli studenti. Per quanto doloroso e frustrante dal punto di vista creativo possa essere, gli studenti e i loro professori dovrebbero essere coivolti in ogni fase del processo: avere delle idee, non averne, scoprire schemi, fare congetture, formulare esempi e controesempi, escogitare argomentazioni e criticare a vicenda il proprio lavoro. Tecniche e metodi scaturiranno spontaneamente, così come è successo nella storia: non isolati dal problema che ne costituisce il sottofondo, ma organicamente connessi a esso e come sua conseguenza. I docenti d'inglese sanno che il modo migliore per imparare l'ortografia e la pronuncia è nel contesto della lettura e della scrittura. Quelli di storia sanno che nomi e date sono privi di interesse quando vengono estrapolati dallo sfondo storico su cui si dipanano gli eventi. Perché l'insegnamento della matematica è rimasto fermo al diciannovesimo secolo? Mettete a confronto

la vostra esperienza di apprendimento dell'algebra con il ricordo che ne aveva Bertrand Russell:

> Mi costringevano a imparare a memoria: «Il quadrato della somma di due numeri è uguale alla somma dei loro quadrati aumentata due volte del loro prodotto». Non avevo la più vaga idea di che cosa volesse dire, e quando non riuscivo a ricordare le parole il mio istruttore mi tirava in testa il libro, cosa che non stimolava minimamente le mie capacità intellettuali.*

Oggi le cose sono davvero cambiate?

SIMPLICIO: Non credo che la tua valutazione sia giusta. Sicuramente i metodi d'insegnamento sono migliorati da allora.

SALVIATI: Intendi dire i metodi di addestramento. L'insegnamento è una relazione umana priva di ordine; non richiede un metodo. Dovrei anzi dire che se hai bisogno di un metodo probabilmente non sei un buon insegnante. Se non hai un feeling con la tua materia che sia sufficiente per parlarne con una tua voce personale, in modo naturale e spontaneo, quanto bene puoi comprenderla? E, visto che parliamo di essere rimasti fermi al Diciannovesimo secolo, non è scandaloso che lo stesso programma scolastico sia fermo al Diciassettesimo? Pensa a tutte le scoperte incredibili e alle rivoluzioni di grande portata del pensiero matematico che si sono verificate negli ultimi tre secoli! Ebbene, non vengono nemmeno menzionate, come se non ci fossero mai state.

SIMPLICIO: Ma non stai chiedendo troppo ai nostri insegnanti di matematica? Ti aspetti che dedichino un'attenzione individuale a decine di studenti, che guidino ognuno di loro lungo il proprio percorso che conduce alla scoperta e all'illuminazione, e che inoltre siano aggiornati sulla storia matematica recente? SALVIATI: Sì, proprio come ci si aspetta che l'insegnante d'arte sia in grado di dare consigli personalizzati, competenti, sulla tecnica pittorica, non importa se

non sa tutto degli ultimi trecento anni di storia dell'arte. Io non mi aspetto nulla del genere, vorrei solo che fosse così.

SIMPLICIO: Dunque dai la colpa agli insegnanti di matematica?

SALVIATI: No, io do la colpa alla cultura che li produce. Quei poveri diavoli cercano solo di fare del loro meglio: fanno solo quello che sono stati addestrati a fare. Sono sicuro che la maggior parte di loro ami i propri studenti e odiano ciò a cui sono costretti a sottoporli. In cuor loro sanno che è una cosa senza senso e degradante. Intuiscono di essere stati trasformati negli ingranaggi di una macchina che schianta lo spirito, ma sono privi della prospettiva necessaria per poterlo comprendere, o per opporvisi. Sanno soltanto di dover «preparare gli studenti per l'anno successivo».

^{*}Bertrand Russel, L'autobiografia, 1872-1914.

SIMPLICIO: Pensi davvero che la maggior parte degli studenti sia in grado di operare a un livello tanto elevato da creare la propria matematica?

SALVIATI: Se pensiamo seriamente che il ragionamento creativo sia troppo «elevato» per i nostri studenti, che essi non ne siano all'altezza, perché consentiamo loro di scrivere elaborati di storia o saggi su Shakespeare? Il problema non è che gli studenti non ne sono all'altezza, ma che nessuno degli insegnanti lo è. Come possono, loro che non hanno mai portato a termine una dimostrazione, dar consigli a uno studente? Ovviamente ci sarebbe tutta una gamma di interessi e di capacità diversi tra gli studenti, così come accade per ogni altra materia, ma almeno gli studenti amerebbero oppure odierebbero la matematica per ciò che è veramente, e non per questo suo assurdo scimmiottamento.

SIMPLICIO: Ma di sicuro vogliamo che tutti i nostri studenti apprendano un insieme fondamentale di fatti e di capacità. È a questo che serve un programma, ed è per questa ragione che è così uniforme: esistono certamente fatti immutabili e indiscutibili che è necessario che i nostri studenti conoscano. Che uno più uno fa due, per esempio, e che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180 gradi. Queste non sono opzioni, né impressioni artistiche venate di sentimento.

SALVIATI: Al contrario! Le strutture matematiche, che siano utili o meno, vengono inventate e sviluppate nel contesto di un problema, e traggono il loro significato da quel contesto. Talvolta vogliamo che uno più uno sia uguale a zero (come accade nella cosiddetta «aritmetica modulo 2»), e che sulla superficie di una sfera la somma degli angoli interni di un triangolo sia maggiore di 180 gradi. Non esistono «fatti» in sé; tutto è relativo e relazionale. È la storia che conta, non solo il finale.

SIMPLICIO: Mi sto stancando di tutto questo tuo incomprensibile sproloquio mistico. Parliamo di aritmetica elementare, va bene? Sei d'accordo oppure no sul fatto che gli scolari dovrebbero impararla?

SALVIATI: Dipende da che cosa intendi per matematica elementare. Se intendi che significhi apprezzare il problema di contare oggetti e quello di disporli in un certo ordine, i vantaggi di raggrupparli e assegnar loro un nome, la distinzione tra la rappresentazione di un oggetto e l'oggetto in sé, e avere un'idea dello sviluppo storico dei sistemi numerici, allora sì, ritengo che ai nostri alunni si debba offrire tutto questo. Se intendi la memorizzazione meccanica di fatti relativi all' aritmetica senza una cornice concettuale sottostante, allora no. Se intendi che significhi analizzare il fatto per nulla ovvio che cinque gruppi di sette oggetti equivale a sette gruppi di cinque, allora sì. Se intendi che significhi elaborare una regola per cui $5 \times 7 = 7 \times 5$, allora no. Fare matematica dovrebbe sempre voler dire scoprire schemi ed elaborare spiegazioni eleganti e significative.

SIMPLICIO: E che mi dici della geometria? Nel suo caso gli studenti non fanno delle dimostrazioni? La geometria della scuola superiore non è forse un esempio perfetto di ciò che tu vorresti siano le lezioni di matematica?

LA GEOMETRIA DELLA SCUOLA SUPERIORE: UNO STRUMENTO DEL DEMONIO

Non c'è niente di più irritante per l'autore di una feroce denuncia che vedersi offrire a proprio sostegno il bersaglio principale del suo veleno. E mai un lupo travestito da agnello è stato tanto subdolo, né un falso amico tanto infido quanto la geometria della scuola superiore. È proprio *il fatto che sia* un tentativo della scuola di introdurre gli studenti all'arte del ragionamento a renderla così pericolosa.

Spacciandosi per l'arena in cui gli studenti potranno finalmente dedicarsi al vero ragionamento matematico, in realtà questo virus attacca la matematica al cuore, distruggendo l'essenza stessa del ragionamento creativo razionale, avvelenando il piacere degli studenti per questa materia bella e affascinante e privandoli per sempre della capacità di ragionare sulla matematica in modo naturale e intuitivo.

Dietro a tutto questo c'è un meccanismo sottile e astuto. Lo studente vittima viene prima stordito e paralizzato con un assalto di definizioni, proposizioni e notazioni inutili. Dopodiché viene disabituato lentamente a ogni naturale curiosità o intuizione nei riguardi delle figure geometriche e delle loro regolarità con un indottrinamento sistematico al linguaggio pomposo e alla struttura artificiale della cosiddetta «dimostrazione geometrica formale».

Metafore a parte, le lezioni di geometria sono di gran lunga la componente più distruttiva dal punto di vista mentale ed emotivo dell'intero programma di matematica della scuola dell'obbligo. Se in altri corsi di matematica il magnifico uccello viene nascosto o chiuso in una gabbia, nelle lezioni di geometria viene torturato apertamente e con crudeltà. (A quanto pare non sono capace di fare a meno delle metafore.)

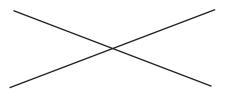
Ne consegue l'erosione sistematica dell'intuito dello studente. Una dimostrazione, ovvero un'argomentazione matematica, è un'opera di fantasia, una poesia. Il suo scopo è *appagare*. Una bella dimostrazione dovrebbe spiegare in maniera chiara, profonda ed elegante. Un'argomentazione ben scritta e ben costruita dovrebbe dare la sensazione di una spruzzata d'acqua fresca ed essere un fascio di luce: dovrebbe rinfrescare l'animo e illuminare la mente. E dovrebbe essere *incantevole*.

Non c'è nulla di incantevole, in quelle che vengono spacciate per dimostrazioni durante le lezioni di geometria.

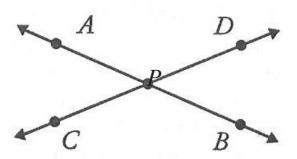
Agli studenti viene assegnata una struttura rigida e dogmatica all'interno della quale ci si aspetta che conducano le loro cosiddette «dimostrazioni», una gabbia tanto inutile e inadeguata quanto lo sarebbe pretendere che dei bambini che

vogliono allestire un giardino chiamassero i loro fiori per genere e specie.

Esaminiamo qualche esempio specifico di questa follia. Cominceremo dal caso di due rette che si intersecano.



Ora, la prima cosa che succede di solito è l'inutile intorbidamento delle acque prodotto da un eccesso di notazioni. A quanto pare non è consentito parlare semplicemente di due rette; bisogna assegnar loro nomi elaborati. E non basta chiamarle «retta l» e «retta 2», oppure *a* e *b*. Dobbiamo per forza scegliere a caso dei punti privi d'importanza su di esse e poi far riferimento alle rette utilizzando una speciale «notazione per le linee rette».



Vedete, adesso le chiamiamo \overline{AB} e \overline{CD} e Dio non voglia che omettiate quelle stanghette sopra le lettere, dato che con AB ci si riferisce alla *lunghezza* di \overline{AB} (o almeno è così che penso funzioni). Per quanto inutilmente complicato sia, questo è il modo in cui bisogna imparare a farlo. E adesso viene l'enunciato vero e proprio, cui si assegna in genere un nome assurdo come

PROPOSIZIONE 2.1.1

Siano \overline{AB} e \overline{CD} due rette che si intersecano in P. Quindi, $LAPC \cong LBPD$.

In altre parole, gli angoli a sinistra e a destra di *P* sono uguali. Ah, però! La configurazione di due linee che si intersecano è *simmetrica*, santiddio! E come se non bastasse, questa affermazione assolutamente ovvia su rette e angoli deve poi essere «dimostrata».

Dimostrazione:

ASSERZIONE	MOTIVAZIONE 1. Assioma di addizionabilità degli angoli		
1. $m\angle APC + m\angle APD = 180$ $m\angle BPD + m\angle APD = 180$			
$2.\ m \angle APC + m \angle APD = m \angle BPD + m \angle APD$	2. Proprietà sostitutiva		
$3.\ m \angle APD = m \angle APD$	3. Proprietà riflessiva dell'uguaglianza		
$4. \ m \angle APC = m \angle BPD$	4. Primo principio di equivalenza		
5. ∠APC≅ ∠BPD	5. Assioma dell'ampiezza angolare		

Al posto di un'argomentazione arguta e godibile scritta da un essere umano reale e svolta in una delle tante lingue naturali del mondo, abbiamo questo tetro, arido, burocratico modulo prestampato di dimostrazione. E quale montagna si è fatta di un mucchietto di terra! Vogliamo davvero far credere che un'osservazione elementare come questa richieda un preambolo così esteso? Ovviamente no. Chi mai lo vorrebbe?

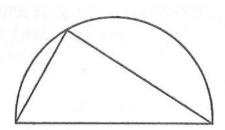
L'effetto di una tale costruzione creata su qualcosa di così semplice è di far dubitare le persone del proprio intuito. Mettere in questione ciò che è ovvio, insistendo sul fatto che vada «dimostrato rigorosamente» (come se l'esempio riportato sopra costituisse una dimostrazione formale valida), equivale a dire allo studente: «Le tue impressioni e le tue idee sono sospette. Se desideri che ti capiamo devi pensare ed esprimerti come noi».

Sul fatto che la dimostrazione formale ricopra un ruolo fondamentale all'interno della matematica non ci sono dubbi. Ma tale ruolo non deve essere il primo approccio al ragionamento matematico. Lasciamo almeno che gli studenti prendano familiarità con alcuni oggetti matematici, e imparino che cosa devono aspettarsi da quegli oggetti, prima di cominciare a formalizzare le loro scoperte. La dimostrazione formale rigorosa diventa importante solo quando c'è una crisi, quando scopriamo che i nostri oggetti immaginari si comportano in maniera controintuitiva, quando c'è un paradosso. Ma questo eccesso di igiene preventiva è del tutto superfluo, nel nostro caso, considerato che nessuno si è ancora ammalato! Se poi, a un certo punto, dovesse insorgere un intoppo nella logica, allora è ovvio che bisognerebbe indagarla e rendere l'argomentazione più chiara, ma è un procedimento che si può eseguire altrettanto bene in modo intuitivo e informale. Di fatto, portare avanti un simile dialogo con la propria dimostrazione costituisce l'anima della matematica.

Perciò, non solo questa pedanteria manda in totale confusione la maggior parte dei ragazzi – nulla è più sconcertante di una dimostrazione dell'ovvio – ma anche quei pochi la cui capacità d'intuizione rimane intatta sono costretti a ritradurre le

loro ottime ed eleganti idee in questo assurdo sistema di geroglifici affinché il loro insegnante possa definirle «corrette». Dopodiché il docente si compiace perché sta affinando in qualche misura la mente dei suoi studenti.

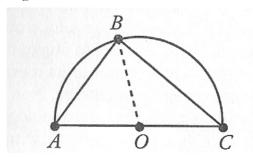
Come esempio più serio, consideriamo il caso di un triangolo inscritto in una semicirconferenza:



Ora, il fatto bello e incontrovertibile di questa configurazione è che, indipendentemente dal punto della circonferenza in cui si pone il vertice del triangolo, si ottiene sempre un angolo retto. (Non ho nulla da obiettare all'uso di un'espressione come «angolo retto» se ha rilevanza per il problema e se rende più facile discuterne. Non è la terminologia in sé che io contesto, ma la terminologia inutile e superflua. Sarei felice di usare il termine «cantone» o persino «porcilaia», se uno studente lo preferisse.)

Ecco un caso in cui il nostro intuito viene in qualche modo messo in dubbio. Non è affatto chiaro che quanto detto debba essere vero; sembra anzi *improbabile*: l'angolo non dovrebbe cambiare se sposto il vertice? Quello che abbiamo qui è un fantastico problema matematico! L'assunto è vero? E se è vero, *perché* lo è? Che grandioso progetto di ricerca! Che magnifica opportunità di esercitare il proprio ingegno e la propria immaginazione! Naturalmente una tale opportunità non viene mai data agli studenti, la cui curiosità e il cui interesse vengono immediatamente scoraggiati dal seguente

TEOREMA 9.5 Sia $\triangle ABC$ inscritto in una semicirconferenza di diametro \overline{AC} . Allora, LABC è un angolo retto.



Dimostrazione: ASSERZIONE	MOTIVAZIONE		
1. Si tracci il raggio OB. Allora OB = OC = OA	1. Dato		
2. $m \angle OBC = m \angle BCA$ $m \angle OBA = m \angle BAC$	2. Teorema del triangolo isoscele		
3. $m \angle ABC = m \angle OBA + m \angle OBC$	3. Assioma di addizionabilità degli angoli		
4. $m \angle ABC + m \angle BCA + m \angle BAC = 180$	4. La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180 gradi		
5. <i>m</i> ∠ <i>ABC</i> + <i>m</i> ∠ <i>OBC</i> + <i>m</i> ∠ <i>OBA</i> = 180	5. Sostituzione (riga 2)		
$6.\ 2m \angle ABC = 180$	6. Sostituzione (riga 3)		
7 m/ARC = 90	7 Secondo principio di equivalenza		

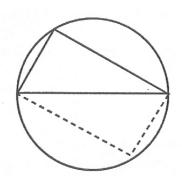
Può esserci qualcosa di più sgradevole e inelegante? Può un'argomentazione essere più illeggibile e creare più confusione? Questa non è matematica! Una dimostrazione dovrebbe essere un'illuminazione divina, non un messaggio in codice del Pentagono. Ecco qual è il risultato di un senso distorto del rigore logico: bruttezza. Lo spirito dell'argomentazione è stato seppellito sotto un mucchio di formalismo disorientante.

8. ∠ABCè un angolo retto

8. Definizione di angolo retto

Nessun matematico lavora in questo modo. Nessun matematico ha *mai* lavorato in questo modo. Questo è un totale fraintendimento di ciò che significa fare matematica. La matematica non consiste nell'erigere barriere tra noi e il nostro intuito e nel rendere complicate le cose semplici. La matematica consiste nel rimuovere gli ostacoli che intralciano il nostro intuito e nel mantenere semplici le cose semplici.

Confrontate questa sgradevole e pasticciata dimostrazione con la seguente argomentazione elaborata da uno dei miei studenti di seconda media:



Prendiamo il triangolo e ruotiamolo in modo che formi un poligono di quattro lati inscritto nel cerchio. Dal momento che il triangolo è stato capovolto completamente, i lati della figura devono essere paralleli, pertanto si tratta di un parallelogramma. Questa figura non avrà i lati obliqui perché le sue diagonali sono diametri del cerchio e dunque sono uguali, e ciò significa che deve essere per forza un rettangolo. Ecco perché l'angolo sarà sempre un angolo retto.

Non è magnifico? E il punto non è che questa argomentazione sia migliore dell'altra *come idea*, ma che l'idea è resa bene. (A dire il vero anche l'idea della prima dimostrazione è molto bella ma la si intuisce come attraverso uno specchio, in modo oscuro.)

Più importante è il fatto che l'idea fosse *dello* studente. La classe ha avuto un bel problema a cui lavorare, sono state elaborate delle congetture, si sono tentate delle dimostrazioni, e questo è ciò che un allievo ha concepito autonomamente. Certo, ci sono voluti diversi giorni, e la dimostrazione è stata il risultato finale di una lunga sequela di tentativi falliti. A esser sincero, ho parafrasato considerevolmente la dimostrazione. Quella originale era un bel po' più involuta e inutilmente verbosa (oltre a contenere errori ortografici e grammaticali). Ma credo di essere riuscito a trasmetterne il senso. E quei difetti sono stati un vantaggio: mi hanno dato la possibilità di evidenziare diversi problemi stilistici e logici nell'argomentazione, così lo studente è stato in grado di perfezionarla. Per esempio, non ero del tutto soddisfatto della parte relativa alle due diagonali: non ritenevo fosse del tutto ovvio che sono diametri del cerchio, ma il risultato è stato che da questa riflessione abbiamo guadagnato altre cose su cui ragionare e una comprensione migliore. E infatti lo studente è riuscito a rimediare a quella lacuna piuttosto bene:

Poiché il triangolo è stato ruotato di mezzo giro lungo il cerchio, il vertice deve finire nella posizione esattamente opposta a quella di partenza. È questa la ragione per cui la diagonale del quadrilatero è un diametro del cerchio.

Ecco un magnifico progetto di lavoro e uno stupendo frammento di matematica. Non sono sicuro di chi ne sia stato più orgoglioso, se l'allievo o io stesso. Ma questo è esattamente il genere di esperienza che voglio che i miei studenti abbiano.

Il problema del programma scolastico standard di geometria è che ha prodotto la virtuale eliminazione dell'esperienza privata, personale, di essere un artista impegnato in una sfida. L'arte della dimostrazione è stata sostituita da un rigido schema di noiose deduzioni formali da eseguire in sequenza. Il libro di testo presenta una serie di definizioni, teoremi e dimostrazioni, il professore li copia sulla lavagna e gli studenti li copiano sui quaderni. Poi viene chiesto loro di imitarli negli esercizi. Gli allievi «bravi» sono quelli che afferrano rapidamente lo schema.

Il risultato è che lo studente finisce per partecipare passivamente all'atto creativo. I ragazzi propongono degli argomenti per adattarli a uno schema di dimostrazione preesistente, non perché ne siano *convinti*. Vengono addestrati a scimmiottare argomentazioni logiche, non a elaborarle *intenzionalmente*. Così, non solo non hanno idea di quel che il loro insegnante dice, *ma non hanno idea di quello che loro stessi dicono*.

Anche il modo tradizionale in cui vengono presentate le definizioni è ingannevole. Nel tentativo di creare un'illusione di chiarezza prima di imbarcarsi nella tipica cascata di proposizioni e teoremi, viene fornita una serie di definizioni allo scopo di rendere gli enunciati e le loro dimostrazioni quanto più succinti possibili. In apparenza sembra un'operazione innocua; perché non abbreviare un po', così da potersi esprimere in modo più economico? Il problema è che le definizioni contano. Discendono da decisioni estetiche sulle distinzioni che tu come artista consideri importanti. E sono generate dal problema. Elaborare una definizione significa dar risalto ad una caratteristica specifica o ad una proprietà strutturale e richiamare l'attenzione su di esse. Storicamente ciò scaturisce dal lavoro che si compie su un problema e non come preludio a esso.

Il punto è che non si parte con le definizioni, si parte con i problemi. Nessuno aveva mai avuto l'idea di un numero «irrazionale» finché Pitagora non tentò di misurare la diagonale di un quadrato e scoprì che non lo si poteva rappresentare come frazione. Le definizioni hanno un senso quando si raggiunge un punto della propria argomentazione che rende necessario compiere una distinzione. Se si elaborano definizioni senza motivo, è più probabile che si *provochi* confusione.

Questo è un ulteriore esempio del modo in cui gli studenti vengono separati ed esclusi dal processo matematico. Gli studenti devono essere in grado di elaborare le proprie definizioni quando se ne presenta la necessità, di impostare la discussione da soli. Non voglio che i miei alunni dicano «la definizione, il teorema, la dimostrazione», voglio che dicano «la mia definizione, il mio teorema, la mia dimostrazione».

A parte tutto ciò, il vero problema di questo tipo di esposizione è che è noiosa. La verità è che efficienza ed economia non equivalgono a buona pedagogia. Mi è difficile credere che Euclide approverebbe questo metodo; so per certo che Archimede non lo farebbe.

SIMPLICIO: Aspetta un minuto. Non so a te, ma a me piacevano le lezioni di geometria della scuola superiore. Mi piaceva il modo in cui erano strutturate, e mi piaceva lavorare all'interno del rigido formato della dimostrazione.

SALVIATI: Ne sono certo. Probabilmente ti è persino capitato di lavorare su qualche bel problema, di tanto in tanto. A moltissime persone piacciono le lezioni di geometria (anche se sono molto più numerose quelle che le odiano). Ma questo non è un punto a favore del regime attuale. È invece una straordinaria testimonianza

del fascino della disciplina stessa. È difficile rovinare completamente qualcosa di così bello; persino quest'evanescente parvenza di matematica può risultare attraente e appagante. A molte persone piace dipingere riempiendo di colori aree numerate, se è per questo; è un'attività manuale rilassante e vivace. Ma sono perfettamente consapevoli del fatto che non si tratta di vera arte pittorica.

SIMPLICIO: Ma ti sto dicendo che a me piaceva.

SALVIATI: Be', se tu avessi avuto un'esperienza matematica più genuina ti sarebbe piaciuta ancora di più.

SIMPLICIO: Dunque dovremmo limitarci a partire per un'escursione matematica non pianificata e gli studenti impareranno qualsiasi cosa capiterà loro di imparare? SALVIATI: Esatto. I problemi condurranno ad altri problemi, le tecniche verranno elaborate quando sarà necessario e nuovi argomenti sorgeranno spontaneamente. E se qualche argomento non dovesse mai emergere in tredici anni di scuola, significherebbe che non è poi così interessante né così importante.

SIMPLICIO: Sei completamente ammattito...

SALVIATI: Forse hai ragione, ma anche lavorando all'interno del modello di riferimento convenzionale un buon insegnante è in grado di guidare la discussione e il flusso dei quesiti in modo tale da permettere agli studenti di scoprire e inventare la matematica da sé. Il vero problema è che la burocrazia non consente al singolo insegnante di farlo. Con un programma prestabilito da seguire, un insegnante non può fare da guida. Occorrerebbe che non ci fossero regole fisse, né programmi. Solo individui che fanno ciò che ritengono sia meglio per i loro studenti.

SIMPLICIO: Ma come possono le scuole garantire che gli studenti avranno le stesse conoscenze di base? Come faremo a dare una valutazione esatta del valore di ciascuno rispetto agli altri?

SALVIATI: Non possono farlo, e non lo faranno. Proprio come avviene nella vita reale. Alla fine bisogna accettare il fatto che le persone sono diverse, e che va bene così. E in ogni caso non c'è urgenza. Un ragazzo si diploma alla scuola superiore senza conoscere le formule trigonometriche di bisezione. (Come se adesso le conoscesse...) E allora? Almeno porterà con sé una qualche idea di ciò in cui consiste veramente la matematica, e avrà visto qualcosa di bello.

In conclusione...

Affinché la mia critica ai programmi scolastici standard sia completa ed esaustiva, qui di seguito vado a esporre in maniera assolutamente onesta il catalogo dei programmi di matematica per la scuola dell'obbligo.

Il programma scolastico standard di matematica

MATEMATICA DELLA SCUOLA PRIMARIA. L'indottrinamento ha inizio.

Gli scolari imparano che la matematica non è qualcosa che si fa, ma qualcosa che si subisce. Stare seduti fermi, riempire fogli e seguire le istruzioni sono le cose su cui si pone l'enfasi. Ci si aspetta che i bambini padroneggino un complesso insieme di algoritmi per manipolare dei simboli indiani, algoritmi che non hanno alcun rapporto con i loro reali desideri o con la loro curiosità e che solo qualche secolo fa erano considerati troppo difficili per un adulto medio. Si dà grande peso alle tabelline della moltiplicazione e un peso altrettanto grande grava sulle spalle di genitori, insegnanti e allievi.

MATEMATICA DELLA SCUOLA SECONDARIA. Agli studenti si insegna a considerare la matematica un insieme di procedure, simili a riti religiosi, che sono eterne e incise nella pietra. Vengono distribuite le sacre tavole, o Libri di Matematica, e gli studenti imparano a riferirsi agli anziani della chiesa come a impersonali «loro». (Come nella frase «Che cosa vogliono che faccia qui? Vogliono che divida?») Verranno introdotti improbabili e artificiosi «problemi verbali» per far sembrare divertente, al confronto, l'insensata fatica dell'aritmetica. Gli studenti saranno interrogati su un'ampia gamma di termini tecnici inutili, come «numero intero» e «frazione propria», senza che ci sia la minima giustificazione logica per una tale distinzione. Eccellente preparazione per Algebra I.

ALGEBRA I. Per non sprecare tempo prezioso ragionando sui numeri e sui loro nessi, questo corso si incentra invece sui simboli e sulle regole per la loro manipolazione. Il filo narrativo continuo che porta dai problemi inscritti sulle tavolette dell'antica Mesopotamia alla nobile arte degli algebristi del Rinascimento viene scartato per lasciare il posto a un adattamento postmoderno di inquietante frammentarietà, privo di personaggi, trama o tema. L'insistenza sul fatto che tutti i numeri e le espressioni vadano scritti in varie forme standardizzate produrrà una confusione ulteriore sul significato di identità e di uguaglianza. Per qualche ignota ragione, gli studenti dovranno anche memorizzare la formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado.

GEOMETRIA. Isolato dal resto del curriculum, questo corso susciterà le speranze di quei ragazzi che desiderano dedicarsi a un'attività matematica significativa, per poi però infrangerle. Verrà introdotta una notazione contorta e fuorviante, e si farà tutto il possibile per far sembrare complicato ciò che è semplice. Scopo del corso è eliminare qualsiasi traccia residua di intuito matematico innato, in preparazione ad Algebra II.

ALGEBRA II. Argomento di questo corso è l'uso immotivato e inappropriato della geometra analitica. Le sezioni coniche vengono introdotte in un sistema di coordinate in modo da allontanarsi definitivamente dalla semplicità estetica dei

coni e delle loro sezioni. Si imparerà a riscrivere le forme quadratiche in una serie di formati standard senza alcun motivo. In Algebra II verranno introdotte anche le funzioni esponenziali e logaritmiche, a dispetto del fatto che non sono oggetti algebrici, ma a quanto pare soltanto perché bisogna infilarle da qualche parte. La scelta del nome del corso serve a rafforzare il mito della scala a pioli. Perché il corso di Geometria venga inserito tra Algebra I e il suo proseguimento resta a tutt'oggi un mistero.

TRIGONOMETRIA. Il contenuto di due settimane di lezioni viene dilatato fino a occupare un intero semestre per mezzo di vacui e masturbatori giri di parole e definizioni. A fenomeni veramente belli e interessanti, come il modo in cui i lati di un triangolo dipendono dai suoi angoli, verrà data la stessa enfasi che ad abbreviazioni irrilevanti e a convenzioni notazionali obsolete per impedire agli studenti di farsi un'idea chiara di ciò in cui consiste davvero la materia. Gli studenti impareranno trucchi mnemonici per ricordare le formule trigonometriche invece di sviluppare una naturale sensibilità intuitiva per l'orientamento e la simmetria. La misura degli angoli sarà introdotta senza il minimo accenno alla natura trascendente delle funzioni trigonometriche, o ai conseguenti problemi linguistici e filosofici insiti nell'effettuazione di tali misurazioni.

INTRODUZIONE ALL'ANALISI MATEMATICA. Un insensato minestrone di argomenti sconnessi. Perlopiù un tentativo malriuscito di introdurre i metodi analitici del tardo Diciannovesimo secolo in ambiti in cui non sono né necessari né utili. Vengono presentate definizioni tecniche dei concetti di «limite» e di «continuità» allo scopo di rendere oscura l'idea intuitivamente chiara di cambiamento uniforme. Come suggerisce il nome, questo corso prepara lo studente per quello di Analisi Matematica, dove verrà completata la fase finale dell'offuscamento sistematico di ogni idea istintiva relativa a forma e movimento.

ANALISI MATEMATICA. In questo corso si analizzerà la matematica del movimento, e i modi migliori per seppellirla sotto una montagna di inutili formalismi. Nonostante sia un'introduzione al calcolo differenziale e integrale, le idee semplici e profonde di Newton e Leibniz saranno scartate per lasciar posto al più sofisticato approccio basato sullo studio di funzioni, elaborato in risposta a diverse crisi analitiche che non hanno alcuna attinenza in quest'ambito e che naturalmente non verranno menzionate. Lo si dovrà seguire di nuovo all'università, parola per parola.

Ecco servita una prescrizione completa per menomare in modo permanente le giovani menti, una cura di provata efficacia contro la curiosità. Ecco a che cosa hanno ridotto la matematica! Questa disciplina possiede una tale sconvolgente

profondità e una tale straziante bellezza che è davvero assurdo che venga liquidata e ridotta all'antitesi della creatività. L'umanità sta perdendo familiarità con una forma d'arte che è più antica di qualsiasi libro, più profonda di qualsiasi poesia e più astratta di qualsiasi astrazione. Ed è *la scuola* che ha provocato e sta continuando a causare tutto questo! È un triste circolo vizioso di insegnanti innocenti che infliggono danni a studenti innocenti. E invece potremmo tutti divertirci molto di più.

SIMPLICIO: Bene, sono in uno stato di assoluta depressione. E adesso? SALVIATI: Be', credo di avere un'idea che riguarda una piramide inscritta in un cubo...

PARTE II

Giubilo

E così, l'assurda tragedia nota col nome di «didattica della matematica» continua, e anzi non fa che diventare più depravata e asinina ogni anno che passa. Ma non voglio parlarne più. Sono stanco di lamentarmi. A che scopo? La scuola non si è mai occupata di ragionamento e creazione. La scuola si occupa di addestrare i ragazzi a essere meri esecutori, in modo da classificarli. Non scandalizza affatto apprendere che la scuola rovina la matematica: la scuola rovina qualsiasi cosa! Inoltre non è necessario che vi dica che le vostre ore di matematica erano una noiosa, inutile perdita di tempo: ci siete passati, ricordate?

Invece, quello che farò sarà dirvi qualcosa di più su che cos'è davvero la matematica e perché io la amo tanto. Come ho già detto, la cosa più importante è capire che la matematica è un'arte. La matematica è qualcosa che si fa. E ciò che si fa è esplorare un luogo molto speciale e peculiare, un luogo che prende il nome di «realtà matematica». Si tratta naturalmente di un luogo della fantasia, un paesaggio di strutture eleganti e fantastiche abitato da meravigliose creature immaginarie che sono impegnate in ogni sorta di comportamenti affascinanti e curiosi. Voglio darvi un'idea di come è la realtà matematica e del perché mi attrae tanto, ma prima lasciate che vi confidi che questo luogo è di una bellezza e di un incanto talmente sconvolgenti che io vi trascorro una buona parte della mia vita. Ci penso di continuo, così come la gran parte degli altri matematici. A noi piace quel luogo, e proprio non riusciamo a starne lontani.

Da questo punto di vista, un matematico assomiglia molto a un biologo che lavora sul campo. Immaginate di esservi accampati ai margini di una giungla tropicale, diciamo in Costarica. Ogni mattina prendete il machete e partite in esplorazione per effettuare delle osservazioni, e ogni giorno vi innamorate sempre di più della ricchezza e dello splendore di quei luoghi. Supponete di essere interessati a un tipo di animale in particolare, diciamo ai criceti. (Non importa se in Costarica esistano davvero criceti oppure no.)

Ciò che importa è che i criceti hanno un proprio comportamento. Fanno cose divertenti e interessanti; scavano, si accoppiano, corrono di qua e di là e costruiscono nidi dentro tronchi cavi. Avete studiato un gruppo particolare di criceti del Costarica abbastanza bene da identificarli uno per uno e assegnar loro dei nomi: Rosie è bianca e nera e ama rintanarsi; Sam è marrone e gli piace starsene al sole. Voi osservate, notate e vi incuriosite.

Perché alcuni criceti si comportano in maniera diversa rispetto agli altri? Quali caratteristiche sono comuni a tutti gli esemplari? È possibile classificarli e raggrupparli utilizzando criteri significativi e interessanti? Come vengono generati i nuovi piccoli criceti, e quali sono i tratti ereditati? In poche parole, avete per le mani dei problemi relativi ai criceti. Questioni genuine, affascinanti, a cui volete trovare una risposta.

Ebbene, anch'io ho dei problemi per le mani, ma non sono situati in Costarica e non riguardano i criceti. La sensazione però è la stessa. Esiste una giungla abitata da strane creature con degli interessanti comportamenti, e io voglio comprenderli. Per esempio, tra gli abitanti della giungla matematica che io preferisco ci sono degli animali fantastici: 1, 2, 3, 4, 5,...

Non prendetemi per matto, vi prego. Lo so che probabilmente avete avuto esperienze avvilenti, con questi simboli, e so anche che vi si stringe il petto al ricordo. Rilassatevi. Andrà tutto bene. Credetemi, sono un dottore... in filosofia.

Prima di tutto, dimenticatevi dei simboli: non contano. I nomi non contano mai. Rosie e Sam farebbero le stesse cose anche con nomi differenti; a loro non importa dei vostri sciocchi vezzeggiativi. Questo è un concetto di enorme importanza: sto parlando della differenza tra la cosa in sé e la *rappresentazione* della cosa. Non sono assolutamente di alcuna importanza i termini che volete usare (se ne volete usare) o i simboli che desiderate adottare (se desiderate adottarne). La sola cosa che conta in matematica è ciò che *sono* le cose e, soprattutto, come *agiscono*.

Dunque a un certo punto gli uomini cominciarono a contare (nessuno sa quando). Si fece un gran balzo in avanti quando si capì che era possibile rappresentare le cose per mezzo di altre cose (un caribù attraverso l'immagine dipinta di un caribù, per esempio, o un gruppo di persone per mezzo di un cumulo di sassi). Poi (di nuovo, non sappiamo quando) gli uomini primitivi concepirono l'idea di *numero*; di «trinità», per esempio. Non tre bacche o tre giorni, ma tre in *astratto*. Nel corso dei millenni l'uomo ha inventato ogni genere di linguaggi per rappresentare i numeri: marchi e segni, monete, sistemi per la manipolazione di simboli eccetera. Dal punto di vista matematico, niente di tutto questo conta molto. Dal mio punto di vista (quello del matematico sognatore e privo di senso pratico) una rappresentazione simbolica come 432 non è migliore né peggiore di un cumulo immaginario di quattrocentotrentadue sassi (e per molti versi io preferisco i sassi). Per me il passo importante non è il passaggio dai sassi ai simboli, bensì la transizione dalla quantità all'*entità*: al concetto di «cinque» o di «sette» non come quantità di qualcosa ma come *esseri*, come criceti, che hanno caratteristiche e comportamenti.

Per esempio, per un algebrista come me, l'affermazione 5 + 7 = 12 non dice tanto che cinque limoni e sette limoni fanno dodici limoni (benché sicuramente lo affermi). Quello che comunica a me è che alle entità note con i soprannomi «cinque» e «sette» piace praticare una certa attività (vale a dire «sommarsi») e che quando lo fanno formano una nuova entità che a noi piace chiamare «dodici».

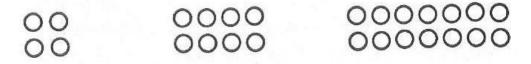
E questo è ciò che queste creature *fanno*, indipendentemente da come vengano chiamate o da chi. In particolare, dodici non «comincia con uno» né «finisce con due». Di per sé il dodici non comincia né finisce, semplicemente è. (Con che cosa «comincia» un cumulo di sassi?) È soltanto la *rappresentazione* del dodici nel sistema posizionale decimale indo-arabico che comincia con un 1 e finisce con un 2. E questa rappresentazione è, di fatto, irrilevante. Capite che cosa sto dicendo?

Come matematici siamo interessati alle proprietà intrinseche degli oggetti matematici, non alle banali caratteristiche di un arbitrario costrutto culturale. È vero che il simbolo 69 ha lo stesso aspetto se lo si rovescia, ma il numero sessantanove non ha alcun «aspetto». Spero che riusciate a comprendere come questo punto di vista sia una naturale conseguenza dell'estetica del «semplice è bello». Che m'importa del sistema notazionale che alcuni mercanti arabi introdussero in Europa nel Dodicesimo secolo? M'importa dei miei criceti, non dei loro nomi.

Perciò proviamo a pensare a questi numeri 1, 2, 3, come a creature che hanno comportamenti interessanti. Naturalmente il loro comportamento è determinato da ciò che sono, ovvero dimensioni di insiemi. (È in questa veste che vi ci siamo imbattuti la prima volta!)



In tal modo potremo osservarli «allo stato brado», per così dire, e non ci lasceremo distrarre o fuorviare da qualche conseguenza casuale della notazione usata. Un comportamento che fu notato molto presto è che alcuni numeri (come cumuli di sassi) possono essere sistemati in due file uguali:



I numeri quattro, otto e quattordici hanno questa proprietà, mentre il tre, il cinque e l'undici non ce l'hanno. E non è a causa dei loro nomi, è a causa di ciò che sono e di ciò che fanno. Ecco dunque un caso di distinzione comportamentale tra entità matematiche: alcuni numeri si comportano in questo modo (i cosiddetti numeri «pari») e alcuni no (i nurneri «dispari»). Per ragioni piuttosto ovvie, tendo a pensare che i numeri pari siano femminili e i numeri dispari maschili. I numeri pari (disposti in due file uguali) hanno un bel profilo regolare, mentre da quelli dispari sporge sempre qualcosa.

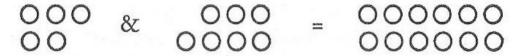




Considerato che accostare mucchietti di sassi è una cosa che viene del tutto naturale fare, è anche naturale chiedersi quale effetto abbia l'addizione sulla distinzione tra numeri pari e dispari. È come chiedersi se nei criceti la distinzione tra quelli pezzati e quelli a pelo uniforme è ereditaria.) Così giocherello un po' con i mucchietti di sassi e noto un delizioso schema:

pari e pari danno pari pari e dispari danno dispari dispari e dispari danno pari

Vedete perché? A me in particolare piace il modo in cui si incastrano due mucchietti dispari:



Sembra proprio che i due mucchietti mi vogliano dire: «due torti fanno una ragione». Quelle fastidiose protuberanze si cancellano a vicenda! E notate bene che ciò vale per *tutti* i numeri dispari, non solo per quelli che mi è capitato di scegliere. In altre parole, si tratta di un comportamento assolutamente generale. È una bella scoperta. Non che ci sia niente di speciale nell'uso di *due* file di sassi. Potremmo anche analizzare ciò che accade quando disponiamo i numeri in tre file, o quattro, o dieci. Che cosa faranno in tal caso i nostri criceti?

D'accordo, so che niente di tutto ciò è particolarmente sofisticato, ma voglio davvero che vi facciate un'idea di queste creature immaginarie e del loro divertente comportamento. È importante per capire il fascino della materia e la sua metodologia (soprattutto nell'epoca moderna). C'è però una differenza assolutamente fondamentale tra i criceti del Costarica e le entità matematiche come i numeri o i triangoli: i criceti sono reali. Fanno parte della realtà fisica. Gli oggetti matematici, anche se inizialmente sono stati suggeriti da qualche aspetto della realtà (mucchietti di sassi, per esempio, o il disco della luna) non sono altro che creazioni della nostra immaginazione.

Ma non solo: siamo noi a crearli e ad assegnar loro specifiche caratteristiche; insomma, sono ciò che noi chiediamo siano. Normalmente siamo in grado di costruire oggetti nella vita reale, ma siamo sempre limitati e intralciati dalla natura della realtà stessa. Ci sono cose che potrei desiderare e che non posso produrre

semplicemente a causa del modo in cui si comportano gli atomi e la gravità. Ma nella realtà matematica, che è un luogo immaginario, posso avere quasi tutto ciò che voglio. Se per esempio mi dite che 1+1=2 e che non c'è niente che io possa farci, potrei semplicemente inventarmi un nuovo tipo di criceto, che quando lo sommi a se stesso scompare: 1+1=0. Potrei dunque decidere che questo 0 e questo 1 non sono più dimensioni di insiemi. E magari questo «sommare» non riunisce insiemi, ma quello che ottengo è ancora un tipo di «sistema numerico». Certo, ci saranno delle conseguenze (come il fatto che tutti i numeri pari saranno uguali a zero), ma va bene così.

In particolare, siamo liberi di abbellire o «migliorare» le nostre strutture immaginarie, se riteniamo che sia meglio. Per esempio, con il trascorrere dei secoli ai matematici è diventato a poco a poco chiaro che l'insieme 1, 2, 3 eccetera è, per certi aspetti, decisamente inadeguato. Il sistema possiede infatti una sgradevole asimmetria, nel senso che posso sempre aggiungere sassi ma non sempre posso toglierne. «Non puoi sottrarre tre da due» è una verità lapalissiana nel mondo reale, ma a noi matematici non piace che ci si dica quello che possiamo e non possiamo fare. Perciò introduciamo dei nuovi criceti in modo da rendere il sistema più bello. Nel caso specifico, dopo aver ampliato il concetto di insieme in modo da includere lo zero (la dimensione dell'insieme *vuoto*), possiamo definire nuovi numeri come -3 nel modo seguente: «-3 è quel numero che sommato a tre dà zero». E possiamo fare lo stesso per gli altri numeri negativi. Notate la filosofia: un numero è ciò che un numero fa.

In particolare, possiamo sostituire l'antiquato concetto di sottrazione con un'idea più moderna: l'addizione dell'opposto. Invece di «otto meno cinque», possiamo (se vogliamo) vedere questa attività come «otto più cinque negativo». Il vantaggio è dato dal fatto che abbiamo a che fare con una sola operazione: l'addizione. Abbiamo trasferito il concetto di sottrazione dal mondo delle operazioni ai numeri stessi. Così, invece di togliermi una scarpa, posso immaginare di mettermi un'«anti-scarpa». E naturalmente la mia anti-anti-scarpa non sarebbe altro che la mia scarpa. Riuscite a cogliere il fascino di questa prospettiva?

Analogamente, se siete interessati alla moltiplicazione (ovvero a fare ripetute copie di mucchietti di sassi), potreste notare una sgradevole mancanza di simmetria. Qual è il numero che triplicato fa sei? Be', due, naturalmente. Ma qual è il numero che triplicato fa sette? Non esiste un mucchietto di sassi del genere. Che nervoso!

Ovviamente non stiamo parlando di mucchietti di sassi (o di anti-sassi). Stiamo parlando di un'immaginaria struttura astratta *che si ispira ai sassi*. Perciò, se vogliamo che ci sia un numero che triplicato dia sette, possiamo semplicemente costruirne uno. Non dobbiamo nemmeno andare in garage a prendere gli attrezzi; lo «portiamo in essere» in senso linguistico. Possiamo anche assegnargli un nome come 7/3 (un'abbreviazione egizia modificata che significa «il numero che

moltiplicato per tre fa sette»). E così via. Tutte le usuali «regole» dell'aritmetica non sono altro che le conseguenze di queste scelte estetiche. Quelli che tanto spesso vengono presentati agli studenti come una fredda e sterile raccolta di fatti e formule sono in realtà i risultati eccitanti e dinamici dell'interazione tra queste nuove creature: le configurazioni che esse mettono in scena come risultato della propria «natura» linguistica innata.

In questo modo noi giochiamo e creiamo, cercando di avvicinarci alla bellezza ideale. Un esempio famoso è l'invenzione (nel Sedicesimo secolo) della geometria proiettiva. In questo caso l'idea è di «migliorare» la geometria euclidea eliminando il *parallelismo*. Soprassediamo in questo momento alle motivazioni storiche che stavano dietro questa decisione (e che hanno a che fare con la matematica della prospettiva), possiamo comunque comprendere che *in generale* due linee rette si intersecano in un solo punto, e che le rette parallele rompono questo schema. Per dirla in altro modo, due punti definiscono sempre una retta, ma due rette non sempre definiscono un punto.

L'ardita idea fu quella di aggiungere dei *nuovi punti* al piano euclideo classico. Per la precisione, si crea un nuovo «punto all'infinito» per ogni direzione nel piano. Adesso, tutte le rette parallele a quella direzione «s'incontreranno» in questo nuovo punto. Possiamo immaginare che il nuovo punto sia «infinitamente lontano» in quella direzione. Ovviamente, siccome ogni linea si estende in due direzioni opposte, il nuovo punto deve essere infinitatmente lontano in *entrambe* le direzioni! In altre parole, le nostre rette sono diventate degli anelli infiniti. Non è un'idea favolosa?

Notate che abbiamo ottenuto ciò che volevamo: *ogni* coppia di rette si incontra esattamente in un solo punto. Se due rette si intersecavano prima, continuano a farlo; se erano parallele, adesso si intersecano «all'infinito». (Per completezza, dovremmo aggiungere un'altra linea retta, ovvero quella formata da tutti i punti all'infinito.) Adesso due punti qualsiasi definiscono un'unica retta e due rette qualsiasi definiscono un unico punto. Che luogo meraviglioso!

Vi sembrano le farneticazioni di un pazzo? Ammetto che ci vuole un po' di tempo per farci l'abitudine. Forse non accettate questi nuovi punti perché non esistono realmente. Ma tanto per cominciare, il piano euclideo, esisteva?

Il punto è che non c'è nulla di reale, in tutto questo, e perciò non esistono regole o restrizioni se non quelle che noi vogliamo imporre. E l'estetica è molto chiara, sia dal punto di vista filosofico sia da quello storico: se uno schema è interessante ed elegante, allora è un buono schema. (E se questo significa dover faticare per accettare una nuova idea, tanto meglio.) Confezionate tutto cio che vi va, a patto che non sia qualcosa di sgradevole. Ovviamente è una questione di gusto, e i gusti cambiano e si evolvono. Benvenuti nella storia dell'arte! Essere un matematico non significa tanto essere intelligenti (anche se, va detto, aiuta); significa piuttosto possedere sensibilità estetica e un gusto raffinato.

In particolare, l'incoerenza è considerata in genere molto sgradevole. Perciò, come minimo, vogliamo che le nostre creazioni matematiche siano coerenti dal punto di vista logico. Questo è un requisito particolarmente importante quando si ampliano o si migliorano strutture esistenti. Naturalmente siamo liberi di fare ciò che ci va, ma di solito vogliamo estendere un sistema in modo che i nuovi schemi non entrino in conflitto con i vecchi. (È questo il caso dell'aritmetica dei numeri negativi e delle frazioni, per esempio). In qualche caso questo ci obbliga a prendere decisioni che altrimenti non vorremmo prendere, come proibire la divisione per zero (se dovesse esistere un numero del tipo 1/0, esso sarebbe in conflitto con l'elegante schema per cui la moltiplicazione per zero dà sempre zero). Ma, finché ci si mantiene coerenti, si può avere quasi tutto ciò che si vuole.

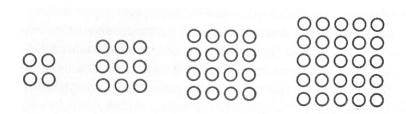
Dunque il paesaggio matematico è pieno di queste strutture deliziose e interessanti che abbiamo costruito (o scoperto accidentalmente) per il nostro divertimento. Le osserviamo, notiamo degli schemi interessanti e tentiamo di elaborare narrazioni eleganti e convincenti per spiegare il loro comportamento.

Almeno questo è ciò che faccio io. Sicuramente ci sono persone il cui approccio è molto diverso: persone dalla mente pratica che vanno alla ricerca di modelli matematici della realtà che li aiutino a fare previsioni o a migliorare un qualche aspetto della condizione umana (o almeno a migliorare lo stato patrimoniale delle società che finanziano). Be', io non sono uno di loro, e la sola ragione per cui sono interessato alla matematica è divertirmi e aiutare la gente a divertirsi. E per quanto mi sforzi non riesco a immaginare un obiettivo più degno. Nasciamo tutti in questo mondo, e prima o poi moriremo e sarà tutto finito. Nel frattempo, godiamoci la nostra mente e le cose meravigliose e buffe che ci possiamo fare. Non so voi, ma io sono qui per *spassarmela*.

Inoltriamoci un po' di più nella giungla, che ne dite? Dovete sapere che l'uomo si dedica alla matematica da parecchio tempo (e in maniera piuttosto intensa negli ultimi tremila anni circa) e che ha fatto un gran numero di scoperte sbalorditive. Eccone una che ho sempre amato: che cosa succede quando si sommano i primi numeri dispari?

Al novizio può sembrare un guazzabuglio casuale di numeri, ma in realtà la sequenza

è tutt'altro che casuale. Si tratta infatti della sequenza dei numeri *quadrati*, ovvero dei numeri di sassi necessari per realizzare il disegno perfetto di un quadrato:



Dunque i numeri quadrati si distinguono dagli altri per il fatto che possiedono questa proprietà particolarmente affascinante (ed è la ragione per cui hanno un nome speciale). L'elenco prosegue all'infinito, ovviamente, dato che si possono realizzare disegni di quadrati di qualsiasi dimensione (i nostri sassi sono immaginari e perciò ne abbiamo una scorta inesauribile).

Ma questo è straordinario! Perché mai la somma di numeri dispari consecutivi dovrebbe dare sempre un quadrato? Continuiamo la nostra indagine:

A quanto pare continua a succedere! Ed è totalmente fuori dal nostro controllo. O questa è una caratteristica vera (e sorprendente e bellissima) dei numeri dispari, oppure non lo è, ma noi non abbiamo voce in capitolo sulla questione. È vero che siamo stati noi a mettere al mondo quelle creature (e questa è una questione filosofica importante in sé), ma adesso sono fuori controllo e fanno cose che non abbiamo mai previsto facessero. Questo è l'aspetto frankensteiniano della matematica: abbiamo l'autorità per definire le nostre creazioni, per instillare in loro qualsiasi caratteristica o proprietà scegliamo, ma non abbiamo voce in capitolo sui comportamenti che possono seguire come conseguenza delle nostre scelte.

Ora, io non ho il potere di suscitare la vostra curiosità per questa scoperta: o vi incuriosisce oppure no. Ma almeno posso dirvi perché suscita la mia curiosità. Per prima cosa, sommare numeri dispari sembra un'attività molto diversa da quella di costruire quadrati (ovvero di moltiplicare un numero per se stesso). In apparenza, queste due idee non hanno molto in comune. C'è qualcosa di controintuitivo, in ciò. Ad attrarmi è la possibilità che esista un nesso, una relazione nuova, imprevista, che migliorerà la mia comprensione intuitiva di questi oggetti e forse cambierà in modo permanente il mio modo di pensare a essi. Immagino che per me questa sia una componente davvero fondamentale: voglio essere cambiato. Voglio essere condizionato in modo profondo. Forse è la ragione più importante per la quale faccio matematica. Nulla che io abbia visto o fatto in vita mia si avvicina ad avere il potere trasformante della matematica. Mi sbalordisce e sconvolge quasi ogni giorno.

Un'altra cosa da notare è che l'insieme dei numeri dispari è *infinito*. Ciò produce sempre un senso di soggezione e fascino. Se effettivamente il nostro schema non proseguisse, come potremmo mai saperlo? Verificarlo per il primo milione di casi non dimostrerebbe nulla: è possibile che non sia valido proprio per il numero successivo. E in effetti ci sono migliaia di semplici quesiti relativi ai numeri interi che ancora oggi rimangono insoluti perché non sappiamo se lo schema prosegue all'infinito oppure no.

Perciò mi chiedo che cosa proviate riguardo alla nostra questione. Forse, semplicemente, non è roba per voi. Spero tuttavia che possiate capire perché a me piace. Amo soprattutto l'astrazione di tutto questo, la sua assoluta semplicità. Non è un problema complicato di ridefinizione delle circoscrizioni elettorali, non è nemmeno una questione relativa alle collisioni tra elettroni. Riguarda i numeri dispari, perdio! È la sua purezza eterea, il suo essere «più universale dell'universo» ad affascinarmi tanto. I numeri dispari non sono criceti pelosi e puzzolenti pieni di visceri e interiora, sono creature della mia immaginazione, felici, libere, più leggere dell'aria. E sono assolutamente terrificanti.

Capite che cosa intendo dire? Sono così semplici che fanno paura? Questi non sono gli alieni della fantascienza, questi sono *veri alieni*. E sono intenti a fare qualcosa, si direbbe. Sembra che la loro somma dia sempre dei quadrati. Ma perché? A questo punto ciò che abbiamo è una *congettura* sui numeri dispari. Abbiamo scoperto uno schema, e pensiamo che continui. Potremmo anche verificare che lo schema funziona per i primi mille miliardi di casi, se volessimo. Allora potremmo dire che il nostro schema è vero per tutti gli scopi pratici. Ma la matematica non è questo. La matematica non è una raccolta di «verità» (per quanto utili e interessanti possano essere). La matematica è ragionamento e comprensione. Noi vogliamo sapere *perché*. E non per uno scopo pratico.

È qui che la matematica si fa arte. Osservazione e scoperta sono una cosa, ma la spiegazione è tutt'altra. Ciò di cui abbiamo bisogno è una dimostrazione, una narrazione di qualche genere che ci aiuti a capire perché si stia verificando quello schema. E gli standard richiesti per una dimostrazione matematica sono dannatamente alti. Una dimostrazione matematica dovrebbe essere una deduzione logica di assoluta chiarezza che, come ho affermato in precedenza, non solo ci deve soddisfare, ma ci deve soddisfare con la sua bellezza. Questo è l'obiettivo del matematico: spiegare nel modo più semplice, elegante e logicamente soddisfacente possibile. Dissolvere il mistero per rivelare una verità semplice, cristallina.

A questo punto, se voi foste i miei apprendisti e avessimo più tempo da trascorrere insieme, vi congederei perché pensiate e vi diate da fare e per vedere quale genere di spiegazione riuscireste a mettere insieme. (E ovviamente sarebbe fantastico se proprio ora decideste di smettere di leggere per cominciare a lavorare sul problema.) Siccome però il mio obiettivo è di darvi un assaggio della bellezza della matematica, cercherò di esporvi una dimostrazione elegante per tentare di convincervi.

Come si fa a provare una cosa simile? Non è come essere un avvocato, che propone la sua versione dei fatti ad altre persone; e non è come essere uno scienziato che verifica una teoria. Questa è una forma d'arte che non ha uguali nel mondo delle scienze razionali. Stiamo cercando di produrre una «poesia della ragione» che ci dia una spiegazione completa e chiara, che soddisfi ogni minima richiesta della logica, e che allo stesso tempo ci faccia venire la pelle d'oca.

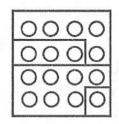
Talvolta mi piace immaginare la critica matematica come un mostro a due teste. La prima testa esige una spiegazione ineccepibile dal punto di vista logico, che sia assolutamente priva di lacune nel ragionamento e di giustificazioni confuse. Questa testa è inflessibile e impietosa. Tutti noi odiamo il suo assillo continuo, ma dentro di noi sappiamo che ha ragione. La seconda testa vuole vedere bellezza ed eleganza, vuole essere ammaliata e deliziata, vuole che si arrivi non soltanto a una verifica ma a un livello più profondo di comprensione. Di solito è questa la testa più difficile da soddisfare. Chiunque può essere logico (e, in effetti, la correttezza di una deduzione può persino essere verificata meccanicamente) ma produrre una vera dimostrazione richiede ispirazione e comprensione intuitiva al più alto livello. In modo analogo, non è così difficile disegnare un ritratto che significhi qualcosa, che trasmetta emozioni e che ci parli, è qualcosa di completamente diverso. In sintesi, il nostro obiettivo è placare il mostro a due teste.

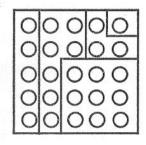
Non che sia tanto facile impostare una dimostrazione qualsiasi. I problemi che affrontiamo risultano così frustranti che la gran parte di noi si accontenterebbe volentieri delle argomentazioni più brutte e arzigogolate (sempre che siano valide dal punto di vista logico). Almeno avremmo la sicurezza che la nostra congettura è corretta e che non ci saranno controesempi. Ma è uno stato di cose insoddisfacente, e non può durare. Come dice Hardy: «Al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta». La storia dimostra che alla fine (magari dopo secoli) qualcuno troverà la vera dimostrazione, quella che comunica non soltanto un messaggio ma una rivelazione.

Ma come procediamo? Nessuno lo sa davvero. Fai dei tentativi, fallisci, ti senti frustrato e speri di avere un'ispirazione. Io considero questo procedimento un'avventura, un viaggio. Di solito so più o meno dove voglio andare, ma non so come arrivarci. La sola cosa che so per certo è che non raggiungerò la mia meta senza una bella dose di sofferenza e di frustrazione e di fogli accartocciati.

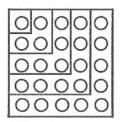
Perciò immaginate di essere impegnati a giocare con questo problema da un po'. A un certo punto vi rendete conto di quanto segue: ciò che lo schema vi sta dicendo è che il disegno di un quadrato può essere sempre diviso in pezzi che sono proprio i numeri dispari. Così sperimentate alcune idee sul modo di spezzare i quadrati. I vostri primi tentativi sono coronati da successo, ma mancano di unità; appaiono casuali e non generalizzabili:







Poi, all'improvviso, in un momento che vi toglie il respiro e vi fa sobbalzare il cuore, le nuvole si diradano e riuscite finalmente a *vedere*:



Un quadrato è un insieme di forme a L una dentro l'altra, e queste forme a L contengono proprio i numeri dispari. Eureka! Capite perché i matematici balzano fuori dalle vasche da bagno e corrono nudi per le strade? Capite perché quest'attività inutile, infantile, risulta così avvincente?

La cosa che voglio comprendiate è proprio questo senso di rivelazione divina. Intuisco che quella struttura era «lì fuori» da sempre; solo che non riuscivo a scorgerla. E adesso ci riesco! È esattamente questo che mi tiene avvinto al gioco della matematica: la possibilità di riuscire a scorgere un segreto sotto cui si nasconde la verità, una sorta di messaggio divino.

Per me, questo tipo di esperienza matematica va al cuore di ciò che significa essere uomini. E voglio spingermi ancora più in là e affermare che la matematica, quest'arte che consiste nella costruzione di schemi astratti - ancor più della narrativa, della pittura o della musica - è la forma d'arte più tipicamente umana. È quello che il nostro cervello fa, che ci piaccia o no. Noi siamo macchine biochimiche programmate per riconoscere gli schemi, e la matematica non è altro che il distillato dell'essenza stessa di ciò che noi siamo.

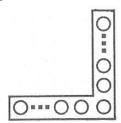
Prima di lasciarci trasportare troppo lontano, è chiaro che queste forme a L seguono effettivamente lo schema? È così ovvio che ciascuna forma a L contiene, rispetto a quella che la precede, esattamente il numero dispari successivo, e che lo schema prosegue all'infinito? (Questo è il genere di scetticismo tipico della testa numero uno del mostro.) Sappiamo quello che *pensiamo* che queste forme a L facciano, e quello che *vogliamo* che facciano, ma chi ci dice che seguiranno i nostri desideri?

È una cosa che capita di continuo, in matematica. Se le dimostrazioni sono storie,

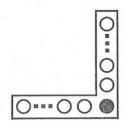
allora hanno delle parti, degli episodi, come le scene di un romanzo. Ciò che le nostre argomentazioni esplicative fanno è dividere il problema in sottoproblemi. Questa è una componente importante del processo di valutazione in matematica. Non è che la nostra dimostrazione sia sbagliata o fatta male, la stiamo soltanto analizzando con maggior attenzione, mettendone i vari pezzi sotto la lente del microscopio della razionalità.

Perché dunque le forme a L danno numeri dispari? Ovviamente l'angolo conterrà sempre un solo sasso, e il pezzo successivo ne conterrà sempre tre, indipendentemente da quanto sia grande il quadrato. In realtà, immagino che potremmo considerare la possibilità che il nostro «quadrato» consista di un solo sasso. Sta a noi decidere se vogliamo includere questo genere di caso «banale». Di solito lo si include, dato che non rompe lo schema: la somma del primo numero dispari, ovvero 1, è di fatto il primo quadrato, 1×1 . Se pensate che valga la pena andare oltre e includere anche lo zero (considerato che è la somma dei primi zero numeri dispari e che, inoltre, $0 \times 0 = 0$) allora potreste prendere in seria considerazione l'idea di diventare matematici di professione. In ogni caso, è chiaro che le prime forme a L soddisfano i nostri desideri.

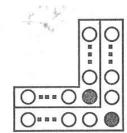
Ma è anche chiaro che lo schema proseguirà oltre la nostra capacità di disegnare figure o di contare? Proviamo a immaginare un'ipotetica forma a L che si trova in un punto qualsiasi della sequenza:



È importante capire che non mi sto vincolando a una dimensione in particolare, ma sto tenendo la mente aperta e sto ragionando *in generale*, cosicché questa è una forma a L di dimensione arbitraria; l'*n*-esima forma a L, se volete, quella *generica*. A questo punto possiamo sperare di avere il nostro prossimo momento di illuminazione:



Qualsiasi forma a L può essere divisa in due «bracci» e in un «giunto». I due bracci sono uguali, perciò contengono lo stesso numero, e il giunto fa aumentare quel numero di un'unità. Ecco perchè il totale è sempre dispari! Inoltre, quando passiamo da una forma a L alla successiva, notiamo che ciascun braccio cresce esattamente di un' unità:



Ciò significa che alla forma a L più grande corrisponde esattamente un numero maggiore di due rispetto al precedente. È per questo che lo schema si perpetua!

Ecco dunque un esempio di che cosa significa fare matematica. Vuol dire giocare con gli schemi, notare cose, fare congetture, cercare esempi e controesempi, sentirsi ispirati a inventare ed esplorare, elaborare argomentazioni e analizzarle, e sollevare nuove questioni. Ecco in che cosa consiste la matematica. Non sto dicendo che sia di importanza vitale; non lo è. Non sto dicendo che curerà il cancro; non lo farà. Sto dicendo che è divertente e che mi fa sentire bene. E in più è perfettamente innocua. E di quante attività umane è possibile dire *questo*?

Permettetemi di fare un paio di considerazioni importanti. Prima di tutto notate che, una volta che sappiamo *perché* qualcosa è vero, allora sappiamo, in particolare, *che* è vero. Mille miliardi di casi non ci dicono nulla; quando c'è di mezzo l'infinito, il solo modo di conoscere è sapere perché. La dimostrazione è il nostro modo di catturare una quantità infinita di informazioni in modo finito. Questo è ciò che significa realmente quando si dice che qualcosa possiede uno schema, ammesso che lo si possa esprimere con *il linguaggio*.

Un'altra cosa che voglio farvi comprendere è la *definitività* della dimostrazione matematica. Qui non c'è niente di provvisorio o di ipotetico. Non succederà di scoprire in seguito che ci eravamo sbagliati. L'argomentazione è totalmente autosufficiente; non ci aspettiamo nessuna conferma sperimentale.

Infine, voglio sottolineare di nuovo che a contare non è il *fatto* che la somma di numeri dispari consecutivi dia dei quadrati, bensì sono la scoperta, la spiegazione, l'analisi a essere importanti. Le verità matematiche sono solo i fortuiti sottoprodotti di queste attività. La pittura non consiste in ciò che sta appeso nei musei, ma in ciò che si *fa*, nello sperimentare con pennelli e colori.

Per come la vedo io, l'arte non è una raccolta di nomi, è un *verbo*, persino un modo di vivere (o comunque una via di fuga). Ridurre l'avventura che abbiamo appena vissuto insieme alla mera enunciazione di un fatto vorrebbe dire non

averne colto il senso. Il significato profondo è che *abbiamo compiuto* qualcosa di bello e affascinante, e ci siamo divertiti a farlo. Per un istante breve e splendido abbiamo sollevato il velo e intravisto una semplice bellezza senza tempo. Non è qualcosa di prezioso? Non vale la pena di lasciare che i nostri figli abbiano accesso alla forma d'arte più affascinante e creativa che l'umanità possegga?

Coraggio, dunque, dedichiamoci alla matematica! Abbiamo appena visto che la somma di numeri dispari consecutivi dà sempre un quadrato (e, cosa più importante, abbiamo scoperto perché). Che cosa succede se sommiamo numeri *pari consecutivi*? E se sommiamo tutti i numeri?

Esiste uno schema semplice? Sapete spiegare perché si verifica? Buon divertimento!

Aspetta un minuto, Paul. Mi stai forse dicendo che la matematica non è altro che un esercizio di masturbazione mentale? Costruire schemi e strutture immaginari per diletto, e poi studiarli e cercare di trovare delle belle spiegazioni per il loro comportamento, e tutto questo per amore di una sorta di rarefatta estetica intellettuale?

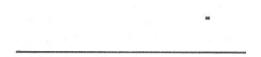
Esatto! È proprio questo che sto dicendo. In particolare, la matematica pura (e con ciò intendo la bella arte della dimostrazione matematica) non ha assolutamente alcun valore pratico o economico. Vedete, le cose pratiche non richiedono spiegazioni. O funzionano oppure no. Anche se si potesse trovare un modo per applicare la nostra scoperta sui numeri dispari a qualche genere di uso pratico (e naturalmente esiste tantissima matematica che è estremamente utile) non ci sarebbe alcun bisogno della nostra bellissima spiegazione. Se funziona per i primi mille miliardi di numeri, allora funziona. Le questioni che coinvolgono l'infinito non emergono nel mondo degli affari o in medicina.

La questione fondamentale, comunque, non è se la matematica abbia un valore pratico: a me non importa se ce l'ha oppure no. Tutto quello che sto dicendo è che non abbiamo bisogno di *giustificarla* su quella base. Stiamo parlando di un'attività della mente umana che è totalmente innocente e incantevole, di un dialogo tra noi e le nostre capacità mentali. La matematica non necessita di patetici pretesti industriali tecnologici. Trascende tutte quelle considerazioni mondane. Il valore della matematica sta nel fatto che è divertente e sorprendente e che ci dà grande gioia (oltretutto gratis!). Dire che la matematica è importante perché è utile è come affermare che i figli sono importanti perché possiamo addestrarli a fare un lavoro spiritualmente insignificante così che accrescano i profitti delle multinazionali. O forse è davvero questo che *stiamo* dicendo?

Presto, rifugiamoci di nuovo dentro la giungla. Proprio come i criceti occupano una certa nicchia biologica – le piante e gli insetti che mangiano, le aree geografiche e il tipo di terreno su cui abitano – così anche i problemi matematici si situano in un ambiente specifico, un ambiente *strutturale*. Lasciate che provi a spiegarvi quest'idea con un altro dei problemi matematici che prediligo.

Prendiamo due punti posti dallo stesso lato rispetto a una linea retta. (Sto

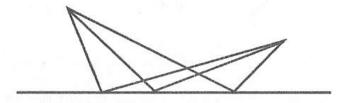
immaginando che sia una retta infinita perché mi sembra più semplice, dato che in tal caso non dobbiamo preoccuparci di punti terminali e delle inutili complicazioni che introducono). La domanda è: qual è il percorso più breve che congiunge i due punti toccando la retta? (Naturalmente è il fatto che il percorso debba toccare la retta a rendere interessante la domanda; se lasciassimo cadere questo requisito, allora la soluzione sarebbe ovvia: il percorso più breve è la linea retta che congiunge i due punti).



È evidente che il percorso più breve deve assomigliare a questo:



Siccome il nostro percorso deve colpire la retta da qualche parte, non possiamo fare di meglio che andare dritti lì. L' ulteriore domanda è: dove si trova quel particolare «lì»? Tra tutti i possibili punti della retta, quale ci fornisce il percorso più breve? O forse questi percorsi sono tutti della stessa lunghezza?

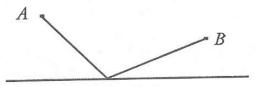


Che problema elegante e affascinante! Che delizioso scenario in cui esercitare la nostra creatività e il nostro ingegno. E notate che in questo caso non abbiamo nemmeno una congettura. Non abbiamo idea di quale sia il percorso più breve, e dunque non sappiamo nemmeno che cosa stiamo cercando di dimostrare. Perciò, in questo caso, non solo dovremo trovare una spiegazione della verità, ma dovremo prima di tutto scoprire qual è la verità.

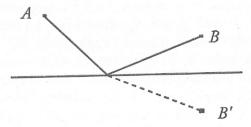
Ancora una volta, se fossi il vostro insegnante di matematica la cosa giusta che dovrei fare sarebbe... non fare *niente*. La maggioranza degli insegnanti (e degli adulti in generale) ha difficoltà a comportarsi così. Se voi foste i miei studenti (supponendo che questo problema vi interessi), mi limiterei a dirvi: «Buon divertimento. Tenetemi al corrente». E il vostro rapporto con il problema si svilupperebbe liberamente.

Userò invece queste pagine per esporvi un'altra stupenda argomentazione matematica, che spero vi incanterà e vi stimolerà.

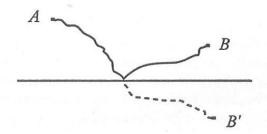
In effetti risulta che esiste un unico percorso di lunghezza minima e ora vi rivelerò come trovarlo. Per comodità, assegniamo dei nomi ai due punti e chiamiamoli A e B. Supponete di avere un percorso che va da A a B e che tocca la retta:



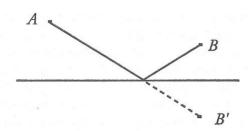
Esiste un modo molto semplice per stabilire se questo percorso è il più breve possibile. L'idea, che si rivela una delle più sorprendenti e inaspettate dell'intera geometria, è di considerare la *riflessione* del percorso rispetto alla retta! Per essere precisi, prendiamo una parte del percorso, per esempio quella che va dal punto in cui colpisce la retta al punto *B*, e tracciamo la sua immagine riflessa rispetto alla retta.



Adesso abbiamo un nuovo percorso che inizia in A, attraversa la retta e termina nel punto B, che è l'immagine riflessa del punto originario B. In questo modo qualsiasi percorso che va da A a B può essere trasformato in un percorso che va da A a B.



Ed ecco che scopriamo che il nuovo percorso ha esattamente la stessa lunghezza del percorso originario. Capite perché? Ciò significa che il problema di trovare il percorso più breve da A a B che tocca la retta equivale al problema di trovare il percorso più breve da A a B'. Ma trovare questo secondo percorso è facile: è una linea retta! In altre parole, il percorso che stiamo cercando è semplicemente quello che, quando *viene riflesso*, diventa rettilineo!



Non è fantastico? Quanto vorrei solo poter vedere la vostra faccia. Vorrei vedere se vi si sono illuminati gli occhi e assicurarmi che abbiate capito la storiella, per così dire. La matematica è essenzialmente un atto di comunicazione, e io voglio sapere se la mia idea vi è arrivata. (Se le lacrime non stanno rigando le vostre guance, forse è il caso che rileggiate.)

Voglio che sappiate che quando vidi per la prima volta questa dimostrazione ne rimasi letteralmente sbalordito. La cosa che mi colpì (e che ancora mi colpisce) è la sua *perversità*. I punti si trovano entrambi sopra la retta. Anche il percorso più breve che li unisce sta sopra la retta. Che cosa diavolo ha a che fare questo con qualcosa che si trova sotto la retta? Quell'argomentazione mi sconvolse; fu senza alcun dubbio una delle mie esperienze matematiche formative.

Perciò voglio utilizzare questo problema per fare alcune considerazioni sul modo in cui i matematici moderni considerano la loro disciplina. Quali questioni solleva la nostra dimostrazione? La prima cosa da notare è lo scenario. Punti, linee, il piano su cui si svolge l'azione, un'idea di distanza o di lunghezza sono i segni distintivi di una struttura geometrica. Il nostro problema rientra in una categoria più ampia di problemi che riguardano ambienti spaziali e nozioni di distanza. Essi possono andare dalle idee geometriche «elementari» degli antichi greci (che a loro volta si ispiravano alle precedenti osservazioni pratiche sul mondo reale degli antichi egizi) alle strutture immaginarie più astratte e bizzarre, molte delle quali non hanno niente a che vedere con nulla che assomigli anche solo lontanamente alla realtà. (Non che noi sappiamo che cosa sia la realtà, ma avete capito ciò che intendo.)

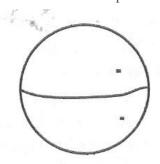
In sostanza, l'aggettivo «geometrico» è usato dai matematici per raggruppare quei problemi e quelle teorie che riguardano un qualche tipo di insieme di punti (che potrebbero essere del tutto arbitrari e astratti) e un qualche tipo di concetto di «distanza» tra di essi (che a sua volta potrebbe non avere alcuna somiglianza con ciò che ci è familiare). Per esempio, allo «spazio» costituito da tutte le file di perline rosse e blu può essere assegnata una struttura geometrica definendo la distanza tra due di queste file come il numero di posizioni nella sequenza delle perline in cui i colori differiscono. Così, la distanza tra i punti RBBRB e BBBRR sarebbe 2, dato che differiscono solo per la prima e l'ultima posizione. Riuscite a individuare un «triangolo equilatero» (ovvero tre punti che si trovano tutti alla stessa distanza l'uno dall'altro) in questo spazio?

Analogamente, è possibile classificare problemi che hanno una struttura algebrica,

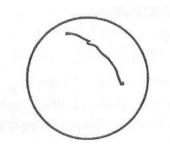
topologica o analitica, oltre che di molti altri tipi, e, naturalmente, combinazioni di tali strutture. Alcune aree della matematica, come la teoria degli insiemi e lo studio dei tipi ordinali, riguardano oggetti che non possiedono quasi struttura, mentre altre (per esempio lo studio delle curve ellittiche) coinvolgono praticamente ogni categoria strutturale esistente. Lo scopo di questa sorta di cornice è lo stesso che c'è in biologia: aiutarci a capire. Sapere che i criceti sono mammiferi (e questa non è una classificazione arbitraria, ma strutturale) ci permette di fare delle previsioni e di sapere che cosa cerchiamo. Le classificazioni sono una guida per il nostro intuito. In modo simile, sapere che il nostro problema ha una struttura geometrica può fornirci idee produttive, così da evitare di sprecare tempo con strategie che non sono in armonia con quel mondo strutturale.

Per esempio, ogni piano d'attacco al nostro problema del percorso più breve che preveda piegature o torsioni sarà destinato a fallire quasi automaticamente, dato che queste attività tendono a distorcere le forme e a scombinare le informazioni sulle lunghezze. Dovremmo invece pensare ad attività e trasformazioni che conservano la struttura. Nel caso del nostro problema, che ha luogo nell'ambito della geometria euclidea, le attività ovvie sarebbero quelle che conservano le distanze, ovvero traslazioni, rotazioni e riflessioni. Da questa prospettiva, il ricorso alla riflessione forse non appare più così sbalorditivo; è un elemento naturale della cornice strutturale del problema.

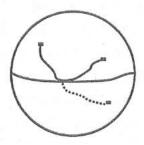
Ma non è tutto. La particolarità delle dimostrazioni è che riescono a dimostrare più di quello che era nelle nostre intenzioni. L'essenza della nostra argomentazione era il fatto che la riflessione rispetto a una linea retta conserva le distanze. Ciò significa che quell'argomentazione si applica a un qualsiasi scenario in cui continuano a esistere i concetti di punto, linea, distanza e riflessione. Per esempio, sulla superficie di una sfera esiste l'idea di una riflessione rispetto a un *equatore*:



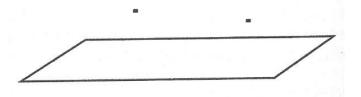
Ciò significa che gli equatori (le curve che si ottengono quando si taglia una sfera in due), sono il naturale omologo sferico delle «linee rette». E infatti risulta che il percorso più breve tra due punti sulla superficie di una sfera è un tratto di equatore (che è poi il motivo per cui gli aerei seguono spesso rotte di questo tipo).



Perciò, il problema corrispondente su una sfera sarebbe: dati due punti posti da uno stesso lato rispetto a un equatore, qual è il percorso più breve che li congiunge e che tocca l'equatore? Io sostengo che la nostra argomentazione precedente rimane valida, senza cambiare nemmeno una virgola. Il percorso più breve è ancora una volta quello che, riflesso, risulta rettilineo.



E che dire del caso di due punti nello spazio che si trovano dalla stessa parte rispetto a un piano?



Quello che sto dicendo è che le dimostrazioni sono più grandi dei problemi da cui hanno origine. Una dimostrazione ci rivela ciò che è davvero importante e ciò che non conta nulla o è solo un dettaglio irrilevante; distingue il grano dal loglio. Ovviamente alcune dimostrazioni sono migliori di altre, da questo punto di vista. Spesso si scopre una nuova argomentazione che mostra che ciò che in precedenza era considerato un requisito importante in realtà non è necessario. Quello che sto cercando davvero di dirvi, suppongo, è che a progettare e a realizzare le strutture matematiche non siamo tanto noi quanto piuttosto *le nostre dimostrazioni*.

Lo sviluppo storico della matematica (soprattutto nei due secoli scorsi) manifesta un andamento costante innegabile: prima vengono i problemi, le cui fonti sono molte e variate, e che spesso si ispirano al mondo reale. A un certo punto vengono stabiliti dei *collegamenti* tra problemi diversi in genere a causa di elementi comuni che compaiono in varie dimostrazioni. Poi si concepiscono strutture astratte che possano «reggere» il tipo di informazione che forma il collegamento (l'esempio classico è il concetto di «gruppo», che descrive in astratto l'idea di un sistema chiuso di attività: operazioni algebriche come l'addizione, oppure sistemi di trasformazioni algebriche o combinatorie come la rotazione e la permutazione). Allora sorgono nuove questioni relative al comportamento di queste nuove strutture astratte: problemi di classificazione, costruzione di invarianti, struttura di sotto-oggetti eccetera. E il processo continua con la scoperta di nuovi collegamenti tra le stesse strutture astratte, generando astrazioni ancora più potenti. In questo modo la matematica si allontana sempre di più dalle sue origini «ingenue». Alcune sue aree, come la logica e la teoria delle categorie, si occupano di spazi (per così dire) i cui «punti» sono a loro volta teorie matematiche!

Come piccolo esempio, consideriamo l'idea centrale nel nostro problema sul percorso più breve: la riflessione. Ora, le riflessioni hanno la divertente proprietà che quando le si esegue due volte è come se non si fosse fatto nulla. Vi ricorda qualcosa? È esattamente ciò che avveniva con il nostro criceto che si autoeliminava, quella nuova versione di 1 + 1 = 0. In questo caso, dunque, abbiamo un collegamento tra una struttura algebrica e una struttura geometrica. Il che solleva molte questioni relative al limite entro il quale sistemi numerici di vario tipo possano possedere «rappresentazioni» geometriche. Si può inventare un sistema numerico che si comporti come le rotazioni di un triangolo?

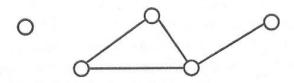
Tutto quello che in realtà sto cercando di dirvi è che noi matematici moderni siamo sempre a caccia di strutture e di trasformazioni che conservano la struttura. Questo approccio non solo ci offre un metodo significativo per raggruppare problemi diversi e per comprendere di che cosa trattino effettivamente, ma ci aiuta anche a restringere la ricerca di idee per le dimostrazioni. Se si presenta un nuovo problema che ricade nella stessa categoria strutturale di un quesito che abbiamo già risolto, può darsi che saremo in grado di usare o di modificare i metodi che abbiamo già utilizzato in precedenza.

E adesso afferrare il machete. Si torna nella giungla! Non so resistere alla tentazione di darvi almeno un altro esempio di estetica matematica. Si tratta di quello che io chiamo il problema degli «amici a un ricevimento». A un ricevimento ci saranno sempre due persone che hanno lo stesso numero di amici tra i presenti?

La prima cosa da fare è decidere il significato che vogliamo dare alle nostre parole. Che cosa intendiamo per persone? Che cos'è l'amicizia? Che cos'è esattamente un ricevimento? Di sicuro non vogliamo avere a che fare con esseri umani in carne e ossa e con le loro complicate vite sociali. L'estetica della semplicità ci impone di liberarci di tutta questa complessità non necessaria e di andare diritti al cuore del problema. La nostra questione non riguarda persone e amicizie, riguarda relazioni

in astratto. Allora un ricevimento diventa una «struttura di relazioni» costituita da un insieme di oggetti (non importa che tipo di oggetti siano) e da un certo numero di relazioni (probabilmente reciproche) tra di essi.

Se volessimmo, potremmo visualizzare una tale struttura usando un semplice diagramma:



In questo caso abbiamo un ricevimento con cinque partecipanti, tra cui uno sconosciuto (senza amici) e un tizio piuttosto popolare che ha ben tre amici. E si dà il caso che ci *siano* due oggetti con lo stesso numero di connessioni (due, per la precisione).

Ecco dunque una semplice e bella categoria di strutture matematiche (note tra gli addetti ai lavori con il nome di «grafi») e una questione genuina e divertente su di esse: è vero che in *ogni* grafo c'è una coppia di oggetti che ha lo stesso numero di connessioni? (Ipotizziamo ovviamente che i nostri grafi comprendano più di un oggetto.)

Da dove nascono problemi matematici come questi? Ve lo voglio svelare: nascono dal gioco. È sufficiente giocherellare nella realtà matematica, spesso senza avere in mente uno scopo specifico. Non è difficile trovare dei buoni problemi: basta che *voi stessi* vi avventuriate nella giungla. Garantito: non potrete non inciampare in qualcosa di interessante ogni due passi.

VOI: Paul, stavo pensando a quello che dicevi prima sulla disposizione dei numeri in file di uguale lunghezza, e ho notato che alcuni numeri sono così sgraziati che non è possibile disporli in un qualunque numero di file uguali. Prendi il 13: non c'è proprio modo.

IO: In effetti potreste sempre disporli in un'unica fila da tredici... o in tredici file da uno!

VOI: Sì, ma è *banale*. Lo puoi fare con qualsiasi numero. Sto parlando di usare almeno due file. In ogni caso, ho cominciato a fare un elenco di questi strani numeri. Eccolo:

e sembra che continui, ma non sono riuscito a trovare alcuno schema che lo caratterizzi.

IO: Già, vi siete imbattuti in qualcosa di molto misterioso. La verità è che non sappiamo granché di questi vostri strani numeri. Una cosa che *sappiamo* è che non finiscono mai: esiste una quantità infinita di numeri che non si possono disporre in

file di uguale lunghezza. Forse sarebbe una buona cosa che provaste a dimostrare questo fatto.

VOI: Sì, voglio pensarci su. Comunque, ho notato, nel mio elenco, la distanza tra i numeri. In generale sembra. che si diradino man mano che diventano più grandi, ma poi ogni tanto si trovano dei piccoli agglomerati come 17, 19 e 101, 103 in cui la distanza è solo di due. È una cosa che continua a succedere?

IO: Nessuno lo sa! I vostri strani numeri si chiamano «primi», e quelli che si presentano a coppie si chiamano «primi gemelli». Il dubbio sul fatto che questi ultimi continuino a presentarsi è noto col nome di «congettura dei primi gemelli» ed è uno dei problemi irrisolti più famosi dell'aritmetica. La gran parte delle persone che se ne è occupata (me compreso) ha la sensazione che probabilmente sia vero - che i primi gemelli continuino a presentarsi -, ma nessuno lo sa per certo. Spero di vedere una dimostrazione della congettura prima di morire, ma non sono molto ottimista al riguardo.

VOI: È davvero bizzarro che qualcosa di così semplice si riveli tanto difficile! L'altra cosa che ho notato è che dopo 3, 5, 7 sembra che non ci siano altri casi di tre numeri primi in fila. È vero?

IO: Triplette di primi! Ecco un problema fantastico per voi.

VOI. Perché non provate a lavorarci su così vediamo che cosa escogitate?

(Pochi giorni dopo...)

VOI: Credo di aver scoperto qualcosa! Stavo cercando le triplette di primi e ho notato che ogni volta che si hanno tre numeri dispari consecutivi uno di essi è *sempre* un multiplo di 3. In 13, 15, 17, per esempio, il numero centrale è 5 x 3.

IO: Grandioso! E questo fatto spiega perché 3, 5, 7 è L'ultima tripletta di primi: l'unico numero primo che è multiplo di 3 è il 3 stesso. Adesso non vi resta che capire *perché* tre numeri dispari consecutivi devono sempre contenere un multiplo di 3.

VOI: Ma questo processo non termina mai? La matematica non ha mai fine?

IO: No, perché la soluzione di un problema conduce sempre a nuovi quesiti. Per esempio, adesso mi avete indotto a domandarmi se cinque numeri dispari consecutivi debbano sempre contenere un multiplo di 5...

È questo il modo in cui nascono i problemi: da un'esplorazione vera, in cui le scoperte si fanno per caso. E non è forse così che funziona tutto ciò che è importante della vita? I bambini lo capiscono. Sanno che imparare e giocare sono la stessa cosa. È triste che una volta cresciuti se ne dimentichino! Pensano che imparare sia un dovere, e in questo modo lo fanno diventare tale. Il loro problema è l'intenzionalità.

Perciò permettetemi di lasciarvi con il solo consiglio pratico che ho da offrirvi:

giocate! Non avete bisogno di un diploma per fare matematica. Non avete bisogno di seguire lezioni o di leggere un libro. La realtà matematica è *vostra* e potete godervela per il resto della vita. Esiste nella vostra immaginazione e potete farci tutto quello che volete. Anche niente, ovviamente.

Se siete studenti che vanno a scuola (e in tal caso vi faccio le mie condoglianze), tentate di ignorare l'inutile assurdità della vostra ora di matematica. Se volete, potete sfuggire alla noia facendo della vera matematica. È bello avere delle cose interessanti a cui pensare mentre si guarda fuori dalla finestra e si aspetta che suoni la campanella.

E se siete insegnanti della materia, allora *soprattutto* voi avete bisogno di giocherellare nella realtà matematica. Il vostro insegnamento dovrebbe scaturire in maniera naturale dalla *vostra* esperienza dentro la giungla, non dalla fasulla versione per turisti che seguono percorsi prestabiliti dentro un'auto con i finestrini chiusi. Perciò gettate dalla finestra l'insulso programma scolastico e i libri di testo! Allora voi e i vostri studenti potrete cominciare a fare *matematica* insieme. In tutta serietà, lasciate che vi ponga una domanda: se non vi interessa eslorare il vostro universo immaginario personale, se non vi interessa fare delle scoperte e cercare di comprenderle, come potete definirvi insegnanti di matematica? Se non avete un rapporto personale con la materia che insegnate, se non vi dà emozioni, se non vi fa correre brividi lungo la schiena, allora è meglio che troviate qualcos'altro da fare. Vi piace lavorare con i ragazzi e fare gli insegnanti è il vostro vero desiderio? Perfetto. Ma insegnate qualcosa che abbia un vero *significato* per voi, su cui abbiate qualcosa da *dire*. È importante essere onesti su questo punto. Altrimenti noi insegnanti possiamo fare un sacco di danni involontari, temo.

E se non siete né studenti né insegnanti, ma semplicemente persone che vivono in questo mondo e come tutti noi cercano amore e significato, spero di essere riuscito a offrirvi un'idea di una cosa che è bellissima e pura, un'attività innocua e gioiosa che da migliaia di anni regala un indicibile piacere a molte persone.

Qualunque testo, immagine o suono che ti piace è tuo! Riproducilo e diffondilo con i mezzi a tua disposizione, senza chiedere il permesso. Ogni opera appartiene alla comunità delle persone in grado di apprezzarla: l'individuo isolato non produce nulla, dunque nulla gli appartiene in maniera esclusiva. Se la proprietà materiale è un furto, quella intellettuale è una truffa. Chi fotocopia un libro, chi contribuisce in qualunque modo alla diffusione di un'opera dell'intelletto umano, avvantaggia un sapere avverso al censo e agisce in favore della conoscenza e della cultura di tutti. NO COPYRIGHT.

Finito di stampare nel mese di febbraio 2013 da edizioni sprofessori Napoli

