Se fai sempre quello che ti piace,
almeno una persona è felice

Katharine Hepburn

Paul Lockhart

LA MISURAZIONE

PRIMA PARTE

DIMENSIONE E FORMA

edizioni sprofessori

http://sprofessori.noblogs.org

INDICE

NOTA DEL TRADUTTORE

Measurement, uscito nel 2012 negli Stati Uniti ed ancora inedito in lingua italiana, riprende le fila di un discorso iniziato una decina di anni prima. Risale infatti al 2002 l'irruzione delle idee di Paul Lockhart nella comunità matematica. In quell'anno, molte delle principali università americane videro la comparsa di un pamphlet anonimo che metteva sotto accusa l'intero sistema nazionale di insegnamento della matematica: *Lamento di un matematico. Come la scuola ci ruba la nostra forma d'arte più affascinante ed immaginifica*. La scuola veniva additata come principale responsabile del disinteresse che la maggior parte delle persone prova nei confronti della matematica: le persone non amano la matematica perché non hanno alcuna idea di cosa sia e non ne hanno alcuna idea perché la scuola ne fornisce un'idea completamente sbagliata.

Infatti, in America, così come in Italia ed in ogni altro paese sotto l'influenza culturale statunitense, la matematica viene imposta come un linguaggio esoterico che bisogna imparare per poter, un giorno lontano, comprendere meglio la scienza, il progresso tecnologico, lo sviluppo economico o qualche altro elemento portante della nostra civiltà. A questa visione dominante Lockhart oppone quella di un'attività essenzialmente inutile, finalizzata al godimento della bellezza, ossia della matematica come arte. Ciò non significa che la matematica sia priva di applicazioni o di utilità per il progresso scientifico: significa solo che la natura e il bello di questa disciplina risiedono altrove.

Con *Measurement*, Lockhart tenta di mostrarci questo altrove: messa da parte la polemica sulla natura della matematica e sulla perversità del sistema scolastico, inizia a presentarci l'oggetto del suo amore e a raccontarcene alcune delle "scoperte più belle ed eccitanti".

Le due sezioni in cui è diviso il libro (*Dimensione e Forma* e *Tempo e Spazio*) corrispondono, grossomodo, a ciò che solitamente chiamiamo rispettivamente "geometria" e "calcolo differenziale". Quello in cui il libro è radicalmente diverso da un qualsiasi altro testo di matematica non sono gli argomenti, ma il modo in cui vengono trattati. Piuttosto che un elenco di teoremi corredati delle rispettive dimostrazioni, ad essere evidenziate sono le domande poste dalla ricerca matematica. Anziché mostrare quello che un matematico sa, Lockhart mostra quello che un matematico fa: si pone domande sui prodotti della propria immaginazione. Tali sono triangoli, quadrati, numeri e forme: creazioni della nostra mente, perfette e dunque irreali, eppure abbastanza vive e sfuggenti da meritare l'appellativo di “realtà matematica”. La matematica è, per Lockhart, l'arte di descrivere questa realtà e il modo migliore per imparare a descrivere qualcosa è quello di rivolgersi a chi di questa cosa non sa nulla. Per questo il libro è scritto in un linguaggio informale, quasi colloquiale, molto diverso da quello a cui ci ha abituato la tradizione dei testi scolastici e universitari: non per “rendere la matematica più interessante”(visto che “è già più interessante di quanto potremmo mai renderla”) ma perché l'essenza di quest'arte è ridurre le cose difficili a quelle più semplici. È un'attività faticosa e Lockhart ce lo sbatte in faccia senza troppi complimenti. Ciononostante, il libro espone idee e problemi matematici in maniera chiara e accessibile come difficilmente può capitare di leggere.

Alla scorrevolezza e semplicità del linguaggio in cui è scritto il testo credo possa essere attribuita un'unica colpa: quella di aver indotto una persona con una conoscenza limitata dell'inglese come il sottoscritto ad azzardare una traduzione in italiano. Ho ancora dei dubbi su alcune delle scelte effettuate: da quella fatta per il titolo *La Misurazione*, il cui senso un po' magniloquente non so quanto sia presente nell'inglese *Measuring*, a quella di lasciare inalterato il termine *pattern*, al posto dei più italiani *struttura* o *schema*, che però mi sembravano togliere parte del significato del termine originale. In ogni caso, il mio intento è quello di proporre un'occasione per parlare di matematica piuttosto che un vero e proprio prodotto editoriale. Sono dunque gradite segnalazioni di errori, critiche, problemi e proposte di collaborazione (magari ad una traduzione della seconda parte su *Tempo e Spazio*).

LA MISURAZIONE

Paul Lockhart

REALTÀ E IMMAGINAZIONE

Esistono molte realtà lì fuori. C'è senz'altro la realtà fisica nella quale ci troviamo. Ci sono poi quegli universi immaginari che assomigliano tanto alla realtà fisica, come quello in cui ogni cosa è esattamente la stessa, tranne per il fatto che in quinta elementare *non* me la facevo sotto, oppure quello in cui quella bella ragazza mora sull'autobus si è rivolta a me, abbiamo iniziato a parlare e alla fine ci siamo innamorati. Ci sono tanti di *questi* mondi immaginari, ma non esistono da nessuna parte.

Voglio parlare di un altro tipo di posto. Lo chiamerò "realtà matematica". Nella mia mente, c'è un universo in cui fluttuano forme meravigliose e pattern che fanno cose curiose e sorprendenti facendomi svagare e divertire. È un posto stupefacente, ed io lo amo davvero.

Il fatto è che la realtà fisica è un disastro. È troppo complicata, e niente è davvero così come appare. Gli oggetti si dilatano e si contraggono con la temperatura, gli atomi volano qua e là. In particolare, niente può essere realmente misurato. Un filo d'erba è privo di una lunghezza precisa. Ogni misura fatta nell'universo è necessariamente una rozza approssimazione. Non è un male; è solo la natura del nostro mondo. Il granello più piccolo non è un punto, e il filo più sottile non è una linea.

La realtà matematica, d'altra parte, è immaginaria. Può essere tanto semplice e bella quanto io voglio che sia. Riesco ad avere tutte quelle cose perfette che non posso avere nella vita reale. Non avrò mai un cerchio nella mia mano, ma posso averne uno nella mia mente. E posso misurarlo. La realtà matematica è un bel paese delle meraviglie di mia creazione, e posso esplorarlo e pensare ad esso o parlarne con i miei amici.

Ci sono molte ragioni per cui la gente si interessa alla realtà fisica. Astronomi, biologi, chimici e via dicendo, cercano di descriverla e di capire come funziona.

Io voglio descrivere la realtà matematica. Per creare dei pattern. Per capire come funzionano. È quello che i matematici come me cercano di fare.

Il punto è che mi interessano entrambe – la realtà fisica e la realtà matematica. Entrambe sono belle ed interessanti (e in qualche misura spaventose). La prima è importante per me perché io sono dentro di essa, la seconda perché

essa è dentro di me. Voglio avere entrambe queste cose meravigliose nella mia vita, e spero che valga altrettanto per te.
L'idea di questo libro è quella di tracciare dei pattern. Costruiremo pattern di forma e movimento, e cercheremo di capirli e misurarli. E ne vedremo delle belle!

Ma non voglio mentirti: sarà un lavoro molto duro. La realtà matematica è una giungla infinita piena di misteri incantevoli, ma la giungla non svela facilmente i suoi segreti. Preparati alla lotta, sia intellettuale che creativa. La verità è che non conosco alcuna attività umana che richieda tanta immaginazione, intuizione e ingenuità. Ciononostante la pratico. La pratico perché la amo e perché non so farne a meno. Una volta visitata la giungla, non puoi mai lasciarla davvero. Tormenterà i tuoi sogni ad occhi aperti.

Perciò ti invito ad una stupefacente avventura! E, ovviamente, vorrei che tu amassi la giungla e ne subissi il fascino. Quel che ho cercato di fare in questo libro è esprimere che effetto mi fa la matematica e mostrarti alcune delle nostre scoperte più belle ed eccitanti. Non aspettarti note a piè di pagina, richiami né niente di così scolastico. Tutto ciò è *personale*. Spero solo di riuscire a trasmettere queste idee profonde e affascinanti in maniera comprensibile e divertente.

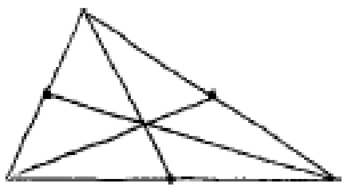
Comunque, aspettati un cammino lento. Non mi interessa farti da balia o proteggerti dalla verità, e non mi scuserò per quanto sarà dura. Lascia ad un'idea ore o persino giorni per essere assimilata - potrebbe aver richiesto secoli!

Assumerò che ti piacciono le cose belle e sei curioso di imparare qualcosa su di esse. Le sole cose di cui hai bisogno per questo viaggio sono buon senso e semplice curiosità umana. Perciò, rilassati. L'arte va gustata, e questo è un libro d'arte. La matematica non è una corsa né una gara; è solo giocare con la tua immaginazione. Divertiti!

I PROBLEMI

Cos'è un problema di matematica? Per un matematico, un problema è un'*indagine* – un esame della realtà matematica per vedere come si comporta. È il nostro modo di “tastare con un bastone” e vedere cosa succede. Abbiamo un pezzo di realtà matematica, che può essere una configurazione di forme, una struttura numerica, o qualcos'altro, e vogliamo capire cosa lo fa funzionare: cosa fa e perché lo fa? Così lo tastiamo – solo che non lo facciamo con le mani e nemmeno con un bastone. Dobbiamo tastarlo con la nostra mente.

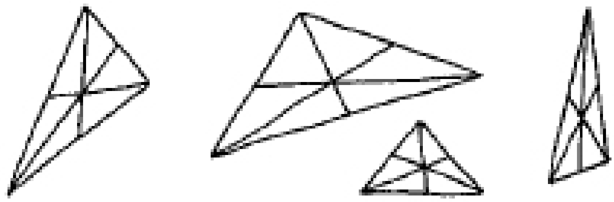
Per esempio, immagina di star giocando con i triangoli, di dividerli in altri triangoli e poi di dividerli ancora, e ti capita di fare una scoperta:



Quando unisci ogni angolo di un triangolo con il centro del lato opposto, le tre linee sembrano incontrarsi in un unico punto. Provi per una gran varietà di triangoli e sembra accadere sempre. Ora hai un mistero! Ma sia molto chiaro qual è veramente il mistero. Non riguarda i tuoi disegni o quello che sembra accadere sulla carta. Ciò che triangoli fatti con carta e penna possono o non possono fare è un problema scientifico sulla realtà fisica. Se il tuo disegno è impreciso, per esempio, allora le linee non si incontreranno. Supponiamo che tu riesca a fare un disegno estremamente accurato e di esaminarlo al microscopio. In tal caso, impareresti molto più sulla grafite e i fogli di carta che non sui triangoli.

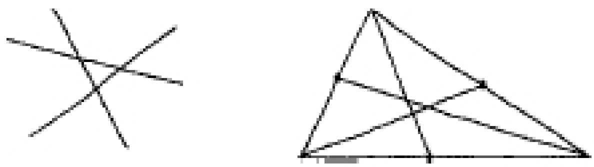
Il vero mistero riguarda triangoli immaginari, troppo perfetti per esistere, e il problema è se queste tre linee perfette si incontrano in un punto perfetto nella realtà matematica. Nessuna matita e nessun microscopio ti aiuteranno adesso (questa è una distinzione che sottolineerò di continuo in questo libro, probabilmente fino alla noia). Allora, come vogliamo affrontare questo problema? Possiamo conoscere davvero qualcosa di questi oggetti immaginari? Che tipo di conoscenza possiamo raggiungere?

Prima di esaminare questi punti, prendiamoci un momento per apprezzare il gusto del problema in sé e di quanto è stato detto sulla natura della realtà matematica.



Ci siamo imbattuti in una congiura. Apparentemente, c'è qualche fondamentale (ed ancora sconosciuta) interazione strutturale che fa si che ciò accada. Penso che sia meraviglioso ed anche un po' allarmante. Cosa sanno i triangoli che noi non sappiamo? A volte mi viene quasi la nausea a pensare a tutte le belle e profonde verità che aspettano lì fuori di essere scoperte e collegate tra di loro.

Allora qual è esattamente il mistero? Il mistero è *perché*. Perché un triangolo dovrebbe voler fare una cosa simile? Dopo tutto, se lasci cadere tre bastoncini a caso, in genere non si incontrano in un punto; si sovrappongono l'un l'altro in tre punti diversi a formare un piccolo triangolo nel mezzo. Non è quello che dovremmo aspettarci?



Stiamo cercando una spiegazione. Senz'altro, una ragione per cui la spiegazione potrebbe non essere disponibile è, semplicemente, che il fatto non è vero. Forse ci siamo lasciati ingannare da un pio desiderio o da un disegno impreciso. Ci sono molti "spazi bianchi" nella realtà fisica, così potremmo semplicemente non aver visto il triangolino determinato dalle tre linee. Forse era tanto piccolo da perdersi tra le macchie e il tratto della matita. D'altra parte, si tratta del tipo di cosa che *potrebbe* essere vera. Ha molte delle caratteristiche che un matematico cerca: naturalezza, eleganza, semplicità, e una certa indiscutibile qualità. Perciò, probabilmente è vera. Ma, di nuovo, il problema è perché.

Ora, è qui che entra in gioco l'arte. Per spiegare dobbiamo creare qualcosa. Precisamente, dobbiamo costruire in qualche modo un'argomentazione – un pezzo di ragionamento che soddisfi la nostra curiosità sul perché di questo comportamento. È un compito molto arduo. Innanzitutto, non basta disegnare o costruire un mucchio di triangoli fisici e vedere che più o meno funziona per essi. Questa non è una spiegazione; è più una "verifica approssimativa". Il nostro è un problema filosofico molto più serio.

Senza sapere perché le linee si incontrano in un punto comune, come facciamo a sapere che effettivamente lo fanno? Diversamente che nel mondo fisico, non c'è niente da osservare. Come facciamo a sapere qualcosa di un regno puramente immaginario? Il punto è che non è tanto importante *cosa* è vero quanto *perché* è vero. Il perché è tutto.

Non che voglia sminuire l'importanza dei nostri sensi ordinari – lungi da me. Abbiamo disperatamente bisogno di ogni specie di ausilio alla nostra intuizione e immaginazione: disegni, modelli, film e qualunque altra cosa. Dobbiamo solo capire che in definitiva queste cose non sono l'argomento della conversazione e non possono dirci realmente la verità sulla realtà matematica.

Ora siamo davvero in una situazione difficile. Abbiamo scoperto che un nostro pensiero potrebbe essere una bella verità, e ora abbiamo bisogno di dimostrarla. Questo è quello che fanno i matematici ed è quello che spero anche tu ti divertirai a fare.

Questa cosa è così straordinariamente difficile da fare? Si, lo è. C'è qualche ricetta o metodo da seguire? No, non c'è. È arte astratta, pura e semplice. E l'arte è sempre una lotta. Non c'è un metodo sistematico per creare disegni o sculture belli e significativi, e non ce ne è uno per produrre argomentazioni matematiche belle e significative. Spiacente. La matematica è la cosa più dura che c'è, ed è questa una delle ragioni per cui io la amo.

Perciò, non posso dirti come farla, e non ti prenderò per mano né ti darò un mucchio di suggerimenti e soluzioni in appendice al libro. Se vuoi disegnare qualcosa con il cuore, non troverai alcun "disegno soluzione" dietro la tela. Se stai lavorando a un problema e sei afflitto ed in pena, allora benvenuto nel club. Neppure noi matematici sappiamo come risolvere i nostri problemi. Se lo sapessimo, non resterebbero a lungo dei problemi! Lavoriamo sempre in territori sconosciuti, e siamo sempre afflitti. Fin quando non troviamo una breccia. Spero che tu ne trovi tante – è una sensazione fantastica. Ma non c'è una procedura speciale per fare matematica. Devi solo pensare molto e sperare che l'ispirazione ti raggiunga.

Ma non ti getterò nella giungla lasciandoti lì da solo. La tua intelligenza e la tua curiosità a cui provvederai da solo saranno il tuo machete e la tua borraccia. Ma forse posso fornirti una bussola sotto forma di qualche generica parola di consiglio.

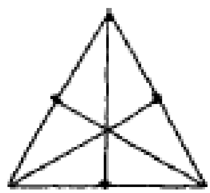
Il primo è che *i problemi migliori sono i tuoi problemi*. Tu sei l'intrepido esploratore mentale; è la tua mente e la tua avventura. La realtà matematica è *tua* – sta lì nella tua testa per essere esplorata ogni volta che ne hai voglia. Quali sono le tue domande? Dove vuoi andare? Ho scelto di presentarti alcuni problemi a cui pensare, ma sono soltanto semi che ho piantato per aiutarti a coltivare la tua giungla. Non aver paura di non saper rispondere alle tue stesse domande – è lo stato naturale dei matematici. Inoltre, cerca di avere sempre cinque o sei problemi su cui lavorare. È molto frustrante continuare a sbattere la testa sempre sullo stesso muro. Molto meglio avere cinque o sei pareti contro cui sbattere la testa! Prendere una pausa da un problema, scherzi a parte, è sempre d'aiuto.

Un altro consiglio importante: *collabora*. Se hai un amico che pure vuole fare matematica, potete lavorare insieme e condividere gioie e frustrazioni. È come suonare assieme. A volte passerò sei o otto ore con un amico a lavorare su un problema, e anche se non arriveremo a niente, comunque ci saremo divertiti a stare muti insieme.

Perciò lascia che sia difficile. Prova a non scoraggiarti e a non prendere i tuoi fallimenti in modo troppo personale. Non sei il solo in difficoltà con la realtà matematica; lo siamo tutti. Non preoccuparti di non avere esperienza o di non essere "qualificato". A fare un matematico non è l'abilità tecnica né la conoscenza enciclopedica, ma la curiosità insaziabile e il desiderio di semplice bellezza. Sii semplicemente te stesso e vai dove vuoi andare. Invece di essere esitante e timoroso di fallimento o confusione, prova ad abbracciare lo sgomento e il mistero di tutto ciò e mettiti gioiosamente nei pasticci. Certo, le tue idee non funzioneranno. Certo, la tua intuizione sarà difettosa. Di nuovo, benvenuto nel club. Ho una dozzina di idee sbagliate al giorno e, come me, ogni altro matematico.

Adesso, so quello che stai pensando: un mucchio di discorsi confusi e romantici sulla bellezza e l'arte e il dolore intenso della creatività, tutti molto buoni e giusti, ma come posso mai pensare di fare una cosa del genere? Non ho mai creato un argomentazione matematica in tutta la mia vita. Puoi darmi un altro piccolo aiuto per proseguire?

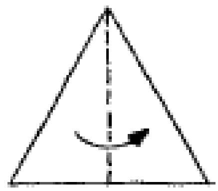
Torniamo al nostro triangolo e alle tre linee. Come possiamo iniziare a rappezzare qualche specie di argomentazione? Potremmo partire guardando un triangolo simmetrico.



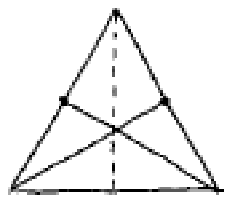
Questo tipo di triangolo è detto **equilatero** (che in latino significa “dai lati uguali”). Ora, capisco che sia una situazione assurdamente atipica, ma l'idea è che se possiamo in qualche modo spiegare perché le linee si incontrano in questo caso speciale, ciò potrebbe fornirci un indizio su come procedere con un triangolo generico. O potrebbe non farlo. Non lo sai mai, ci devi solo girare intorno - ciò che noi matematici chiamiamo “fare ricerca”.

In ogni caso, dobbiamo iniziare da qualche parte, e dovrebbe essere almeno un po' più facile capirci qualcosa in questo caso. Ciò che abbiamo in più in questa situazione sono tonnellate di simmetria. *Non ignorare la simmetria!* Per molti versi, è il nostro più potente strumento matematico. (Mettilo nello zainetto con il machete e la borraccia).

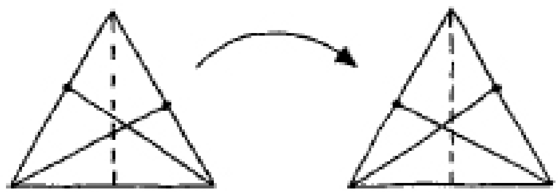
Qui la simmetria ci consente di concludere che ogni cosa che accade su un lato del triangolo deve accadere anche dall'altro lato. Un altro modo di dirlo è che se ribaltiamo il triangolo lungo la sua linea di simmetria, dovrebbe apparire esattamente lo stesso.



In particolare, i punti medi dei due lati si scambiano di posto, così come le linee che li collegano agli angoli opposti.



Ma ciò significa che il punto di intersezione di queste due linee non può stare su un lato della linea di simmetria, altrimenti ribaltando il triangolo si sposterebbe dall'altra parte, e ci accorgeremmo del ribaltamento!



Perciò il punto di intersezione deve stare proprio *sulla* linea di simmetria. Chiaramente la nostra terza linea (quella che unisce l'angolo in alto al punto medio del lato in basso) non è altro che la linea di simmetria stessa, ed ecco perché le tre linee si incontrano in un punto. Non è una bella spiegazione?

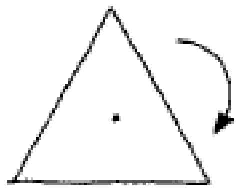
Questo è un esempio di argomentazione matematica, anche noto come *dimostrazione*. Una dimostrazione è semplicemente una storia. I protagonisti sono gli elementi del problema, e la storia devi scriverla tu. Lo scopo, come in ogni opera letteraria, è scrivere una storia dalla narrazione trascinante.

Nel caso della matematica, ciò significa che la storia non solo deve avere senso logico ma deve anche essere semplice ed elegante. A nessuno piace una dimostrazione complicata simile ad una palude tortuosa. Vogliamo senz'altro seguire la razionalità, ma vogliamo anche essere incantati e coinvolti sul piano estetico. Una dimostrazione dovrebbe essere tanto piacevole quanto logica.

Ciò mi conduce ad un altro piccolo consiglio: *migliora le tue dimostrazioni.* Il fatto di avere una spiegazione non significa che sia la migliore spiegazione. Puoi eliminare qualche ingombro o complessità superflua? Puoi trovare un approccio completamente diverso che consenta di penetrare più a fondo la questione? Prova, prova e prova ancora. Pittori, scultori e poeti fanno la stessa cosa.

La nostra dimostrazione, ad esempio, nonostante la sua chiarezza e semplicità logica, ha un carattere un po' arbitrario. Anche se l'utilizzo della simmetria ha avuto un ruolo essenziale, c'è qualcosa di fastidiosamente asimmetrico nella dimostrazione (almeno per me). In particolare, l'argomentazione predilige un angolo. Non che sia tanto sbagliato prendere un angolo e scegliere la sua come linea di simmetria, ma il triangolo è così simmetrico che non dovremmo aver bisogno di una scelta così arbitraria.

Potremmo, per esempio, usare il fatto che oltre ad avere una simmetria di ribaltamento, il nostro triangolo ha anche una simmetria *rotazionale*. Cioè, se lo ruotiamo di un terzo di giro, appare esattamente identico. Ciò significa che il nostro triangolo deve avere un *centro*.



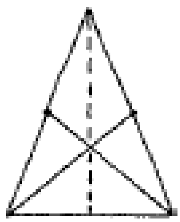
Se ribaltiamo il triangolo lungo una delle sue tre linee di simmetria (senza preferirne nessuna), il triangolo non cambia, perciò il suo centro deve stare lì sopra. Ciò significa che il centro sta su tutte e tre le linee di simmetria. Ecco perché queste linee si incontrano!

Ora, non voglio dire che quest'argomento sia molto meglio o così diverso. (E infatti ci sono molti altri modi di provarlo). Tutto quel che voglio dire è che si può raggiungere una comprensione più profonda affrontando un problema in più modi diversi. In particolare, la seconda prova, non solo mi dice che le linee si incontrano ma mi dice anche dove – e precisamente nel centro di rotazione. Il che porta a domandarsi dove si trova esattamente questo centro e, più precisamente, a che altezza si trova il centro di un triangolo equilatero.

Attraverso tutto il libro, verranno fuori domande come questa. In parte, diventare un matematico significa imparare a porsi queste domande, tastare col tuo bastone in cerca di nuove ed eccitanti verità da scoprire. I problemi e le domande che vengono a me, li evidenzierò in neretto. Puoi pensare ad essi e lavorarci sopra come vuoi e, speriamo, formulare tuoi propri problemi. Dunque, ecco il primo:

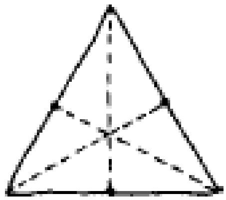
Dove si trova il centro di un triangolo equilatero?

Tornando al nostro problema originale, ci accorgiamo che lo abbiamo appena scalfito. Abbiamo una spiegazione del perché le linee si incontrano in un triangolo equilatero, ma i nostri argomenti sono così dipendenti dalla simmetria, che è difficile immaginare come ciò possa aiutarci ad affrontare la situazione generale. In effetti, penso che il nostro primo argomento funzioni anche quando il nostro triangolo ha solo due lati uguali:



La ragione è che anche questo tipo di triangolo, detto **isoscele** (che in greco significa “dalle gambe uguali”) possiede una linea di simmetria. Questo è un bell'esempio di generalizzazione – dare senso ad un problema o ad un argomento in un contesto più ampio. Ma, per un qualunque triangolo mediamente asimmetrico, le nostre argomentazioni non funzionerebbero.

Questo ci mette in una condizione molto familiare ai matematici: lo stallo. Ci serve una nuova idea, preferibilmente una meno incentrata sulla simmetria. Torniamo al tavolo da disegno.

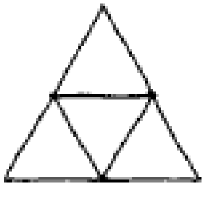


C'è qualcos'altro che potremmo fare con questi personaggi? Abbiamo un triangolo, i punti medi dei lati e le linee che uniscono questi ultimi agli angoli opposti.

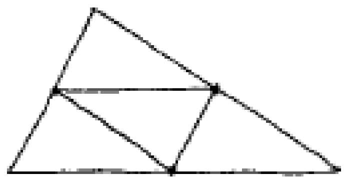
Ecco un'idea. E se collegassimo tra loro i punti medi? Succede qualcosa di interessante? Questo è il tipo di cosa che devi fare come matematico: provare cose. Funzioneranno? Porteranno informazioni utili? In genere no. Ma non puoi startene fermo con lo sguardo fisso su delle forme o dei numeri. Prova una cosa qualunque. Facendo più matematica, la tua intuizione e il tuo istinto si affineranno, e ti verranno idee migliori. Come fai a sapere quali idee provare? Non lo sai. Devi solo fare ipotesi. I matematici esperti hanno una grossa sensibilità per i pattern, e quindi è più facile che le nostre ipotesi siano giuste, ma comunque dobbiamo fare ipotesi. Perciò, fai delle ipotesi.

La cosa importante è non aver paura. Dunque azzarderai qualche idea folle, e non funzionerà. Ciò ti metterà in ottima compagnia! Archimede, Gauss, tu e io – tutti brancoliamo nella realtà matematica, cercando di capire cosa sta accadendo, facendo domande, sperimentando idee e soprattutto sbagliando. E poi, una volta ogni tanto, otteniamo qualche successo (forse un po' più frequentemente nel caso di Archimede o Gauss). E quella sensazione di schiudere un mistero eterno è ciò che ci porta a tornare nella giungla a racimolare ancora qualcosa.

Perciò immagina di aver provato un sacco di idee, e che un giorno ti sia capitato di collegare tra di loro i punti medi.



Cosa notiamo? Bene, abbiamo diviso il nostro triangolo di partenza in quattro triangoli più piccoli. Nel caso simmetrico, sono chiaramente identici. Ma cosa accade in generale?



Sono tutti lo stesso triangolo? In effetti, tre di essi potrebbero essere semplicemente una versione in scala più piccola (scala 1 a 2) del triangolo di partenza. Potrebbe essere così? E il triangolo centrale? Potrebbe essere anch'esso uguale ma girato a testa in giù? In cosa ci siamo imbattuti esattamente adesso?

Ci siamo imbattuti in un barlume di verità, struttura e bellezza; ecco cosa. E forse ciò ci porterà a qualcosa di totalmente inaspettato, probabilmente senza nulla a che fare col nostro problema originale. E sia. Non c'è niente di sacro nel nostro problema delle tre linee; è una domanda come un'altra. Se i tuoi pensieri su un problema ti conducono a un altro problema, tanto meglio per te! Ora hai *due* problemi a cui lavorare. Un consiglio: tieni la mente aperta e flessibile. *Lascia che un problema ti porti dove vuole portarti.* Se ti imbatti in un fiume nella giungla, seguilo!

Questi quattro triangoli sono uguali?

Supponiamo sia vero. E ciò, d'altra parte, è una cosa perfettamente lecita. I matematici fanno continuamente delle ipotesi per vedere cosa potrebbe accadere (i greci avevano addirittura una parola specifica: *analisi*). Ci sono migliaia di apparenti verità matematiche che gli uomini hanno scoperto e credono essere vere ma fino ad ora non sono stati capaci di dimostrarle. Si chiamano *congetture*. Una congettura è semplicemente un'affermazione sulla realtà matematica che credi essere vera (in genere sostenuta da esempi, tali da renderla un'ipotesi ragionevolmente credibile). Spero che ti troverai spesso a congetturare mentre leggi questo libro e fai matematica. Forse riuscirai addirittura a provare alcune delle tue congetture. Allora arriverai a chiamarle *teoremi*.

Supponiamo che la nostra congettura sui quattro triangoli sia vera (e, certamente, continuiamo a volere una bella dimostrazione di questo fatto), il passo successivo sarebbe chiedersi come ciò possa aiutarci a risolvere il nostro problema originale. Forse può, forse no. Devi solo vedere se ti arriva qualcosa.

Essenzialmente, fare matematica significa girarci attorno, fare osservazioni e scoperte, costruire esempi (così come controesempi), formulare congetture, e poi – la cosa più difficile – dimostrare. Spero che trovi questo lavoro affascinante e divertente, stimolante e molto gratificante. Perciò lascerò il problema del triangolo e delle sue linee intersecantesi nelle tue abili mani.

Il che mi porta al prossimo piccolo consiglio: *critica il tuo lavoro*. Sottoponi i tuoi argomenti alla critica feroce tua e degli altri. È quello che fanno tutti gli artisti, specialmente i matematici. Come ho detto, un brano matematico, per essere qualificato come tale, deve resistere a due tipi di critica molto diversi: deve funzionare logicamente ed essere convincente come argomento razionale, ma deve anche essere elegante, rivelatore ed emotivamente appagante. Mi dispiace che questi criteri siano fin troppo impegnativi, ma è la natura dell'arte.

Ora, i giudizi estetici sono ovviamente piuttosto personali, e possono cambiare con tempi e luoghi. Certamente è accaduto alla matematica come alle altre attività umane. Un argomento che era considerato bello mille o anche solo cento anni fa, potrebbe ora apparire sgraziato e inelegante. (Molta matematica dell'Antica Grecia, per esempio, appare piuttosto spaventosa, alla mia sensibilità moderna).

Il mio consiglio è di non preoccuparti di raggiungere uno standard eccessivo di eccellenza estetica. Se le tue dimostrazioni ti piacciono (e molti di noi sono sinceramente orgogliosi delle proprie sofferte creazioni), allora vanno bene. Se in qualche modo ne sei scontento (e molti di noi lo sono), allora ci devi lavorare ancora un po'. Con l’esperienza, acquisirai un tuo gusto e lo svilupperai, e potresti trovare che i tuoi lavori iniziali non ti soddisfano più. È così che deve essere.

Lo stesso vale per la validità logica. Facendo sempre più matematica, la tua prosa diventerà più elegante. Le tue argomentazioni logiche diverranno più sottili, e inizierai a sviluppare un “fiuto” per la matematica. Imparerai ad essere sospettoso, ad avvertire quando qualche dettaglio importante è stato trascurato. Lascia che accada.

C'è un tipo odioso di matematico che semplicemente non accetta mai un’affermazione falsa. Io non sono uno di questi. Credo negli errori – è così che si manifesta l'arte. Perciò i tuoi primi tentativi in questo campo saranno probabilmente disastrosi dal punto di vista logico. Crederai che certe cose sono vere, e non lo saranno. I tuoi ragionamenti saranno imperfetti. Salterai a conclusioni. Bene, continua a saltare. Tu sei l'unica persona che devi soddisfare. Credimi, troverai una miriade di errori nelle tue deduzioni. Ti dichiarerai un genio a colazione e un idiota a pranzo. Lo abbiamo fatto tutti.

Parte del problema è che siamo così interessati alle nostre idee semplici e belle che, quando abbiamo una buona idea, abbiamo tanta voglia di crederci. Desideriamo così tanto sia vera che non sempre le dedichiamo l'attento esame che meriterebbe. È la versione matematica della “narcosi d'azoto”. I sub vedono cose così belle che dimenticano di risalire per respirare. Bene, la logica è la nostra aria, e il ragionamento attento è il nostro modo di respirare. Perciò, non dimenticate di respirare!

La sola differenza tra te e i matematici più esperti è che noi abbiamo visto molte più volte cose ingannevoli. Perciò abbiamo molti più dubbi insistenti e ricerchiamo un più alto grado di rigore logico. Abbiamo imparato a fare l'avvocato del diavolo.

Ogni volta che lavoro ad una congettura, mi soffermo sempre sulla possibilità che sia falsa. Qualche volta lavoro per provarla, qualche altra cerco di rifiutarla – per dimostrare che mi sbaglio. Ogni tanto, scopro un controesempio a dimostrazione che veramente mi sbagliavo e che mi serve ridefinire o addirittura demolire la mia congettura. Qualche altra volta, i miei sforzi per costruire un controesempio mi portano sempre allo stesso ostacolo, e quest'ostacolo diventa la chiave della mia eventuale dimostrazione. Il punto è conservare una mente aperta e non lasciare che i tuoi desideri e speranze interferiscano con la tua ricerca della verità.

Certamente, sebbene molti tra noi matematici ultimamente insistano sul più alto livello di rigore logico, sappiamo anche per esperienza quando una dimostrazione "suona bene" e quando possiamo fornire ulteriori dettagli eventuali. La verità è che la matematica è un'attività umana, e che noi umani facciamo errori. Grandi matematici hanno "dimostrato" degli assoluti non-sense, e anche a te accadrà. (Questa è un'altra buona ragione per collaborare con gli altri – possono avanzare obiezioni che a te potrebbero essere sfuggite).

L'importante è tuffarsi nella realtà matematica, fare qualche scoperta, e divertirsi. Il tuo desiderio di rigore logico crescerà con l'esperienza; non preoccuparti.

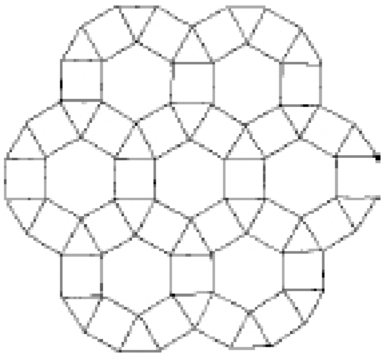
Perciò vai avanti e crea la tua arte matematica. Sottoponila ai tuoi standard di razionalità e bellezza. Ti piace? Benissimo! Sei un artista tremendamente combattuto? Ancora meglio. Benvenuto nella giungla!

PRIMA PARTE
DIMENSIONE E FORMA

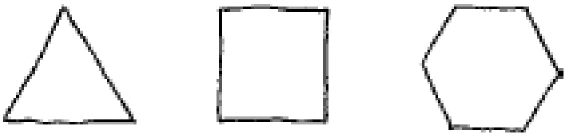
nella quale iniziamo la nostra indagine sulle figure geometriche astratte

1

Ecco un bel pattern.



Lascia che ti spieghi perché lo trovo così interessante. Innanzitutto, perché coinvolge alcune delle mie forme preferite.

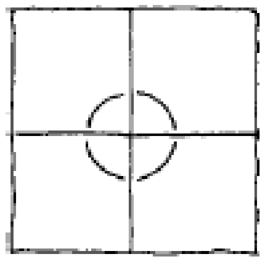


Queste forme mi piacciono perché sono semplici e simmetriche. Forme come queste, create da linee rette sono chiamate **poligoni** (dal greco *polýgônos*, molti angoli). Un poligono con tutti i lati e gli angoli uguali viene chiamato **regolare**. Insomma, sto dicendo che mi piacciono i poligoni regolari.

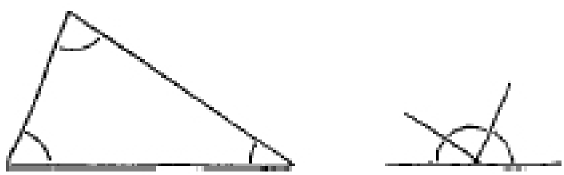
Un'altra ragione per cui il disegno mi attrae è che i pezzi combaciano molto bene. Tra le piastrelle non ci sono spazi vuoti (mi piace pensarli come piastrelle di ceramica, a mo' di mosaico) e non si sovrappongono. Almeno, così sembra. Ricorda, che gli oggetti di cui stiamo realmente parlando sono forme perfette, immaginarie. Solo perché il disegno sembra funzionare, ciò non significa che accada realmente. I disegni, non importa quanto siano precisi, fanno parte della realtà fisica; non possono dirci nessuna verità sugli oggetti immaginari della matematica. Le forme fanno quello che fanno, non quello che noi vogliamo che facciano.

Quindi, come possiamo essere così sicuri che i poligoni combacino perfettamente? In generale, come facciamo a conoscere *qualcosa* di questi oggetti? Il punto è che dobbiamo misurarli – e non con qualche impreciso strumento della realtà come righe o goniometri, ma con la nostra mente. Dobbiamo trovare un modo di misurare queste forme usando argomentazioni esclusivamente filosofiche.

Ti sei accorto che in questo caso ciò che dobbiamo misurare sono angoli? Per scoprire che la struttura di un mosaico come questo funziona, dobbiamo assicurarci che ad ogni angolo (in cui le piastrelle si incontrano) la somma degli angoli dei poligoni sia di un giro esatto. Per esempio, le ordinarie piastrelle quadrate funzionano perché gli angoli di un quadrato sono di un quarto di giro e quindi ce ne vogliono quattro per fare un giro completo.

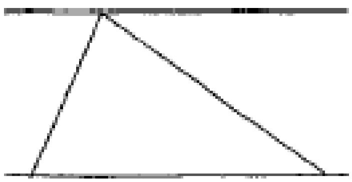


In ogni caso, preferisco misurare gli angoli come frazioni di un giro completo, piuttosto che usare i gradi. Mi sembra più semplice e più naturale che usare un'arbitraria suddivisione del giro in 360 parti (ovviamente *tu* puoi fare come preferisci). Quindi, dirò che un quadrato ha angoli di 1/4. Una delle prime cose che hanno scoperto sugli angoli è il fatto sorprendente che per ogni triangolo (di qualunque forma) la somma degli angoli è sempre la stessa, e precisamente di mezzo giro (o 180 gradi a voler essere prosaici).

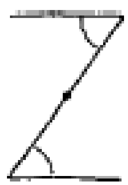


Per rendertene conto, potresti costruire un triangolo di carta e tagliarne gli angoli. Unendoli assieme troveresti che formano sempre una linea dritta. Che bella scoperta! Ma come possiamo esserne certi?

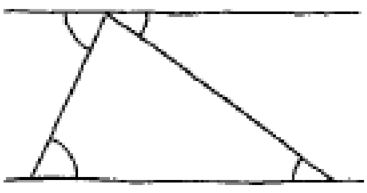
Un modo per capire è immaginare il triangolo stretto tra due linee parallele.



Osserva che queste linee formano delle *Z* con i lati del triangolo. (Immagino che definiresti quella di destra una *Z* rovesciata, ma non è questo l'importante). Ora, la caratteristica delle forme *Z* è di avere sempre gli angoli uguali.



Ciò avviene perché una *Z* è simmetrica; sembra esattamente la stessa se la ruoti di mezzo giro attorno al suo centro. Ciò significa che l'angolo in alto è uguale all'angolo in basso. Capisci? È il tipico esempio di argomento di simmetria. L'invariabilità di una forma sottoposta ad un certo numero di movimenti ci consente di dedurre che due o più misure devono essere uguali. Tornando al nostro triangolo sandwich, osserviamo che ogni angolo in basso corrisponde ad un angolo uguale in alto.

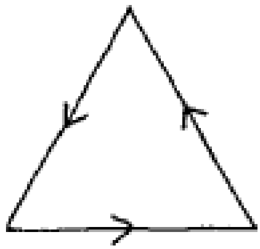


Ciò significa che i tre angoli del triangolo, incontrandosi sopra, formano una linea dritta. Perciò sommati raggiungono mezzo giro. Che bel pezzo di ragionamento matematico!

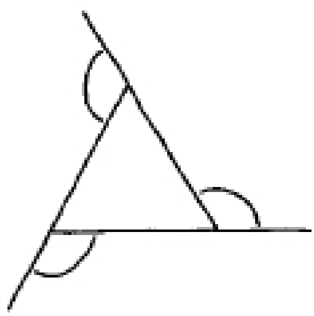
Questo è ciò che si chiama fare matematica. Fare una scoperta (con qualunque mezzo, compreso il gioco con modelli fisici di carta, corde o elastici) e poi spiegarla nel modo più semplice ed elegante possibile.

È qui che sta l'arte, e per questo è così stimolante e divertente.

Una conseguenza di questa scoperta è che se il nostro triangolo è equilatero (cioè regolare) allora i suoi angoli sono tutti uguali e quindi devono essere ciascuno di 1/6. Un altro modo di vedere questo fatto è immaginare di percorrere il perimetro del triangolo.



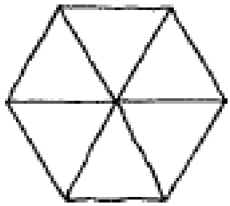
Facciamo tre rotazioni uguali per tornare al punto di partenza. Poiché abbiamo finito per fare un giro completo, ogni rotazione deve essere esattamente di 1/3. Osserva che le rotazioni compiute corrispondono esattamente agli angoli *esterni* del triangolo.



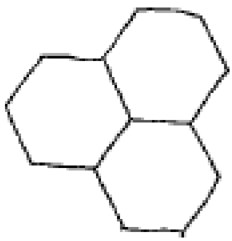
Poiché gli angoli esterni ed interni insieme formano angoli di mezzo giro, gli angoli interni devono misurare

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

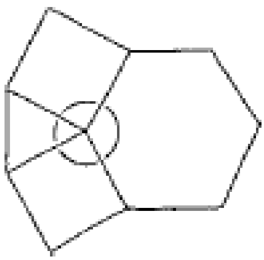
In particolare, sei di questi triangoli possono ricoprire insieme un angolo giro.



Ma questo è un esagono regolare! Così, per premio, abbiamo imparato che gli angoli di un esagono regolare devono essere il doppio di quelli di un triangolo, ossia 1/3. Ciò significa che tre esagoni si incastrano perfettamente.



Così, in fin dei conti, è possibile raggiungere qualche conoscenza su queste forme. In particolare, adesso sappiamo perché il nostro mosaico di partenza funzionava.



Adesso, ad ogni angolo del mosaico abbiamo un esagono, due quadrati e un triangolo. Addizionando gli angoli, abbiamo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1$$

Perciò funziona!

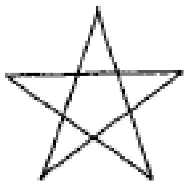
(Comunque, se non ti piace l'aritmetica delle frazioni, puoi sempre evitarla cambiando le unità di misura. Per esempio, se volessi, potremmo decidere di misurare gli angoli in dodicesimi di giro, in modo che gli angoli di un esagono regolare misurerebbero semplicemente 4, un quadrato avrebbe un angolo di 3, e un triangolo un angolo di 2. Allora i nostri angoli, sommati, darebbero: 4+3+3+2=12, ossia un giro completo).

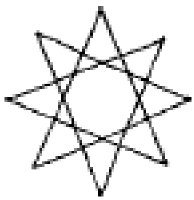
In particolare mi piace la struttura simmetrica di questo mosaico. Ogni angolo ha la stessa esatta sequenza di forme attorno ad esso: esagono, quadrato, triangolo, quadrato. Ciò significa che una volta verificato che gli angoli si incastrano da una parte, sappiamo automaticamente che lo faranno in ogni altra parte. Osserva che lo schema può essere ripetuto indefinitamente così da coprire un intero piano infinito. Ciò porta a chiedersi quali altri schemi di mosaico possono esistere nella realtà matematica.

Quali sono tutti i modi possibili per disegnare mosaici simmetrici usando poligoni regolari?

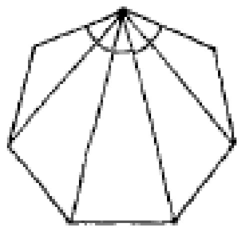
Ovviamente ci servirà conoscere gli angoli dei vari poligoni regolari. Puoi immaginarti come misurarli?

Quanto misurano gli angoli di un poligono regolare di *n* lati?



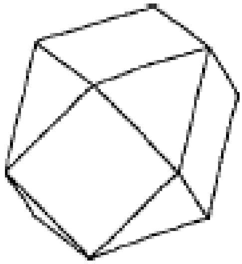


Sai misurare gli angoli di una stella a *n* punte?

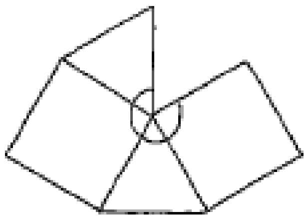


Le diagonali di un poligono regolare formano sempre angoli uguali?

Parlando di belle strutture fatte di poligoni, voglio presentartene un'altra delle mie favorite.



Questa volta abbiamo quadrati e triangoli, ma invece di giacere su un piano, sono disposti su una specie di palla. Questo tipo di oggetto è chiamato **poliedro** (dal greco *polýs èdra,* molti lati). Gli uomini si sono dedicati a questi oggetti per migliaia di anni. Un modo di pensare ad essi è quello di svilupparne la proiezione su un piano. Ad esempio, un angolo della mia forma verrebbe sviluppato in questo modo:



Qui, abbiamo due quadrati e due triangoli attorno ad un punto, ma c'è uno spazio tra di essi in modo che possano essere piegati a mo' di palla. Quindi, nel caso dei poliedri, occorre che la somma degli angoli sia minore di un giro completo.

Che succede se la somma degli angoli è più di un giro completo?

Un'altra differenza tra poliedri e mosaici piani è che il disegno coinvolge solo un numero finito di tessere. Il pattern continua comunque indefinitamente (in un certo senso), ma non si estende all'infinito nello spazio. Naturalmente, anche questi pattern suscitano la mia curiosità.

Quali sono tutti i poliedri simmetrici?

In altre parole, quali sono tutti i modi di tirar fuori dei poliedri dai poligoni regolari, in modo che ad ogni angolo si ripeta lo stesso pattern? Archimede riuscì a scorgere tutte le possibilità. Tu ci riesci?
Senz'altro, i poliedri maggiormente simmetrici sono quelli con tutte le facce uguali, come il cubo. Si chiamano **poliedri regolari.** Che ve ne siano soltanto cinque (i cosiddetti solidi platonici) è una scoperta antica. Riesci a trovarli tutti e cinque?

Quali sono i cinque poliedri regolari?

2

Cosa significa misurare? Cosa facciamo esattamente quando misuriamo qualcosa? Penso sia questo: facciamo un paragone. Paragoniamo la cosa che misuriamo con la cosa con cui misuriamo. In altre parole, *la misura è relativa*. Ogni nostra misura, reale o immaginaria, dipenderà necessariamente dalla scelta dell'unità di misura. Nel mondo reale, abbiamo a che fare con queste scelte ogni giorno – una tazzina di zucchero, una tonnellata di carbone, un po' di frittura, e così via.

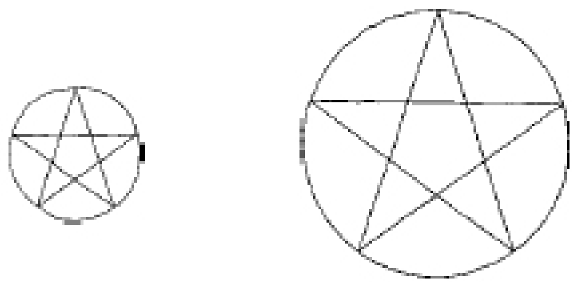
Il problema è – che tipo di unità vogliamo per il nostro immaginario universo matematico? Per esempio, come misureremo le lunghezze di queste due linee?

Supponiamo (per semplicità) che la prima linea sia lunga esattamente il doppio della seconda. È davvero importante quanti pollici o centimetri siano? Non voglio certo sottoporre il mio bell'universo matematico a qualcosa di così mondano ed arbitrario. Per me la cosa importante è la proporzione (quel rapporto 2:1). In altre parole misurerò le due linee una relativamente all'altra.

Un modo di affrontare la questione è semplicemente quello di non usare affatto unità, solo proporzioni. Poiché non c'è nessuna scelta naturale per le unità di lunghezza, non ne faremo alcuna. Come in questo caso. Le linee sono lunghe esattamente quello che sono. Ma la prima è lunga il doppio della seconda. L'altro modo di fare è affermare che poiché le unità non hanno importanza, sceglieremo qualunque unità ci convenga. Per esempio, potrei scegliere la seconda linea come unità, o regolo, in modo da aver a che fare con lunghezze comode. La prima linea ha lunghezza 2, la seconda lunghezza 1. Potrei ugualmente affermare che le lunghezze sono 4 e 2, 6 e 3, o 1 e ½. Semplicemente non importa. Quando creiamo forme o strutture e le misuriamo, possiamo scegliere qualunque unità, sapendo bene che quel che stiamo realmente misurando è una *proporzione*.

Penso che un esempio semplice possa essere il perimetro di un quadrato. Se scegliamo come unità di misura il lato del quadrato (e perché no?) allora il perimetro è ovviamente 4. Ciò che questo significa davvero è che, per ogni quadrato, il perimetro è 4 volte il lato.

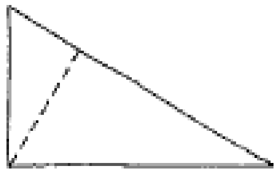
La questione delle unità è collegata all'idea di scala. Se prendiamo qualche forma e la ingrandiamo di un certo fattore, diciamo 2, allora tutte le nostre misure di lunghezza sulla forma ingrandita, risulteranno come se stessimo misurando la forma originale con una riga di grandezza dimezzata.



Chiamiamo questo processo di ingrandimento (o rimpicciolimento) **cambiamento di scala**. Dunque la seconda forma è ottenuta dalla prima scalando di un fattore 2. O, se vogliamo, potremmo dire che la prima forma è la seconda scalata di un fattore ½.

Due figure legate da un procedimento di cambiamento di scala, sono chiamate **simili**. Quello che sto realmente cercando di dire è che se due figure sono simili, collegate da un certo fattore di scala, allora tutte le misure di lunghezza corrispondenti sono collegate dallo stesso fattore. In questi casi si dice che le cose sono "in proporzione". Osserva che la scala non modifica nemmeno gli angoli. La forma resta la stessa, cambia solo la dimensione.

Se due triangoli hanno gli angoli uguali, sono necessariamente simili?

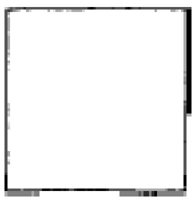


Che succede alle forme con quattro lati?

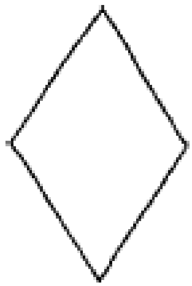
Mostra che se un triangolo rettangolo è diviso in due più piccoli, questi devono essere simili all'originale.

La cosa bella di non fissare unità arbitrarie e di scegliere di misurare proporzioni relative è che ciò rende tutti i nostri problemi indipendenti dalla scala. Per me, questo è l'approccio più semplice ed esteticamente piacevole. E, visto che le tue forme sono nella tua testa e le mie nella mia, davvero non vedo altra alternativa. Il tuo cerchio immaginario è più o meno grande del mio? Ti sembra una domanda sensata?

Ma prima di iniziare a misurare qualcosa, dobbiamo sapere esattamente di cosa stiamo parlando. Supponiamo di avere un quadrato.



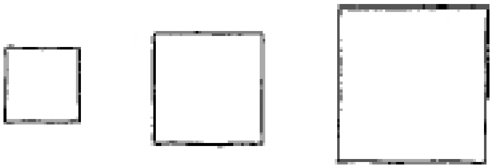
Bene, ci sono alcune cose di questa forma che conosco all'istante, come il fatto che ha quattro lati uguali. La caratteristica di informazioni come questa è che non sono delle vere scoperte, e non richiedono spiegazioni o dimostrazioni. Sono semplicemente parte di ciò che voglio dire con la parola *quadrato*. Ogni volta che crei o definisci un oggetto matematico, esso porta con se' il pattern della sua costruzione – le caratteristiche che fanno di esso quello che è e non un'altra cosa. La domanda che ci poniamo come matematici prende questa forma: se richiedo questo e quest'altro, cos'altro avrò come conseguenza? Per esempio, se richiedo quattro lati uguali, ciò obbliga la mia figura ad essere un quadrato? Ovviamente, no.



Potrebbe essere la forma di un diamante con lati uguali, un cosiddetto **rombo** (che in greco significa "punta affilata"). In altre parole, la prescrizione di avere quattro lati uguali contiene un che di sfuggente. Perciò, una cosa alla quale stare sempre attenti è vedere se abbiamo vincolato i nostri oggetti abbastanza da ricavarne tutte le informazioni. Possiamo misurare con esattezza gli angoli di un rombo arbitrario, perché la descrizione lascia alla forma la libertà di muoversi e cambiare i suoi angoli. Dobbiamo essere chiari sull'estensione delle nostre classi di oggetti, in modo da poter sollevare domande significative e ben poste.

I lati opposti di un rombo sono sempre paralleli?
Le diagonali sono perpendicolari?

Supponiamo di chiedere che gli angoli del nostro rombo siano tutti retti. Ciò costringerebbe, senz'altro, la nostra forma ad essere un quadrato, perché questo è ciò che la parola *quadrato* significa! Adesso c'è ancora spazio per fuggire? C'è in effetti solo un altro grado di libertà, ossia la dimensione. (Ciò, ovviamente, sarebbe relativo a qualche altro oggetto considerato. Se tutto ciò che avessimo fosse un quadrato, la dimensione non avrebbe alcun significato).



Bene, supponiamo dunque di selezionare una lunghezza particolare e immaginiamo un quadrato con i lati di quella lunghezza. *Adesso*, è immobilizzato abbastanza? Si, lo è. E ciò ha conseguenze importanti. Ciò significa che ogni richiesta ulteriore potrebbe non essere ottenibile. Per esempio, se vogliamo che il nostro quadrato abbia diagonali uguali ai suoi lati, abbiamo poche speranze. Non riusciremo ad ottenerlo. Una volta che una forma (o una qualunque struttura matematica) è sufficientemente specificata, allora le "forze della natura matematica" dettano ogni suo comportamento. Possiamo certo provare a vedere cosa è vero, ma non abbiamo più voce in capitolo.

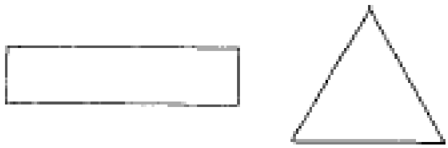
In un certo senso, il vero problema della realtà matematica è quanto controllo abbiamo su di essa. Quanto possiamo chiederle? Quante richieste simultanee possiamo fare prima che si frantumi nelle nostre mani come una scultura di vetro? Quanto è flessibile la realtà matematica? Fino a che punto è clemente o arrendevole? Dove possiamo spingere, e dove ci spinge indietro?

Un parallelogrammo è un poligono di quattro lati con i lati opposti paralleli (una scatola in pendenza). Gli angoli opposti di un parallelogrammo devono essere uguali?

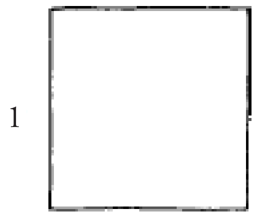
Dimostra che un parallelogrammo con le diagonali uguali deve essere un rettangolo.

3

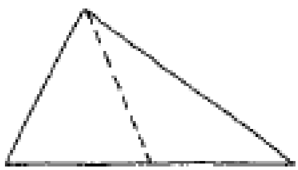
Due oggetti con la stessa forma (ossia oggetti simili) sono facili da confrontare – il più grande è più grande e il più piccolo è più piccolo. È quando confrontiamo forme diverse che le cose si fanno interessanti. Per esempio, quale di queste è più grande, e cosa ciò può mai significare?



Un'idea potrebbe essere quella di comparare lo spazio occupato dalle due figure. Questa misura è generalmente chiamata **area**. Come accade per ogni misura, non esiste un'area assoluta – solo aree relative ad altre aree. La scelta dell'unità è arbitraria; potremmo scegliere una forma qualsiasi, chiamare "unità di area uno" lo spazio da essa occupato, e misurare tutte le altre aree con riferimento ad essa.
D'altra parte, fissata un'unità di lunghezza, c'è una scelta naturale (e abituale), ossia lo spazio occupato da un quadrato di lato unitario.

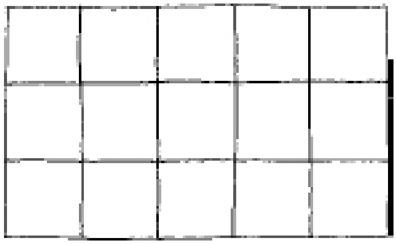


Dunque, la misura dell'area si riduce alla domanda: quanto spazio occupa la mia forma rispetto al quadrato unitario?



Supponi di tagliare un triangolo da un angolo al punto medio del lato opposto. L'area viene così divisa in due?

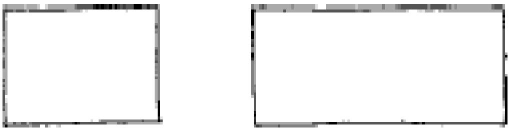
Alcune aree sono relativamente facili da misurare. Per esempio, immaginiamo di avere un rettangolo 3 per 5.



È facile osservare che possiamo dividere il rettangolo in 15 pezzi identici, ciascuno dei quali è un quadrato unitario. Perciò l'area del rettangolo è 15. Cioè, occupa esattamente 15 volte lo spazio occupato da un quadrato unitario. In generale, se i lati di un rettangolo sono dei bei numeri interi, diciamo m ed n, allora l'area è semplicemente il loro prodotto mn. Possiamo semplicemente contare le m righe di n quadrati ciascuna.

Ma come facciamo se i lati non vengono fuori interi? Come facciamo a misurare l'area di un rettangolo se non riusciamo a dividerlo opportunamente in quadrati unitari?

Ecco due rettangoli della stessa altezza.

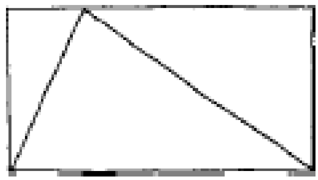


Mi piace vedere il secondo come la versione "stirata" del primo. È abbastanza ovvio che le aree stiano nello stesso rapporto delle rispettive lunghezze? Lo stiramento in una direzione è chiamato **dilatazione**. Ciò che stiamo dicendo è che la dilatazione di un rettangolo di un certo fattore, moltiplica la sua area per quel fattore.

In particolare, possiamo pensare a un rettangolo di lati a e b, come ad un quadrato unitario dilatato due volte: di un fattore a in una direzione e di un fattore b nell'altra.

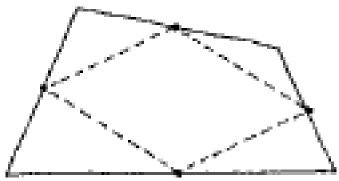
Ciò significa che l'area del quadrato unitario sarà moltiplicata prima per a e poi per b. In altre parole sarà moltiplicata per ab. Dunque l'area di un rettangolo è semplicemente il prodotto dei suoi lati. Non importa se i lati hanno misure intere o no.

E l'area di un triangolo? Il modo che preferisco per pensarci è di immaginare una scatola rettangolare attorno al triangolo. Viene fuori che l'area del triangolo è sempre la metà di quella del rettangolo. Capisci perché?



Perché il triangolo occupa esattamente la metà di questa scatola?

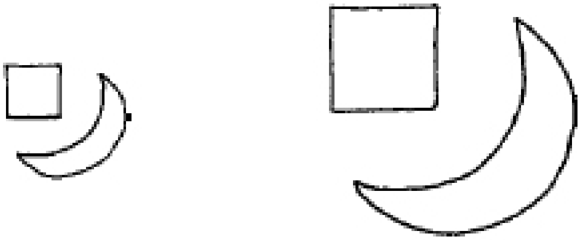
Che succede all'area del triangolo se lasciamo scivolare la punta lungo l'orizzontale? Che succede se oltrepassa i lati della scatola?



Mostra che unendo i punti medi di una qualunque figura di quattro lati, si ottiene sempre un parallelogrammo. Qual è la sua area?

Un poligono qualsiasi può essere diviso in pezzi che riassemblati formino un quadrato?

Una caratteristica interessante dell'area è il modo in cui si comporta rispetto al cambiamento di scala. Possiamo pensare al cambiamento di scala come al risultato di due dilatazioni dello stesso fattore. Se abbiamo un quadrato e cambiamo la scala di un fattore r, allora la sua area sarà moltiplicata per r^2. Per esempio, se ingrandiamo un quadrato di un fattore 2, il suo perimetro raddoppierà, ma l'area diventerà quadrupla. In effetti, ciò vale per una forma qualsiasi. L'effetto del cambiamento di scala sull'area è quello di moltiplicarla per il quadrato del fattore di scala. Un modo semplice di rendersene conto consiste nell'immaginare un quadrato con la stessa area della forma.



Dopo aver scalato di un fattore r, le aree restano uguali - le due forme racchiudono la stessa quantità di spazio che io cambi o meno il mio regolo. Poiché l'area del quadrato viene moltiplicata per r^2 così deve essere anche per l'area dell'altra forma.

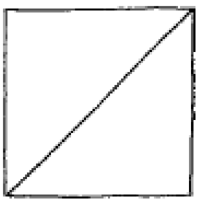
Il problema esiste anche in tre dimensioni. Viene generalmente chiamato **volume**. Ovviamente, possiamo prendere come unità di volume, quello di un cubo con lato unitario. Il primo problema è come misurare una semplice scatola tridimensionale.

Come dipende dai suoi lati il volume di una scatola?

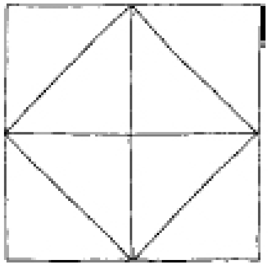
Qual è l'effetto di un cambiamento di scala sul volume?

4

Lo studio di dimensione e forma si chiama **geometria**. Uno dei problemi più antichi e influenti nella storia della geometria è questo: quanto è lunga la diagonale di un quadrato?



Ovviamente, quello su cui ci stiamo realmente interrogando è la proporzione tra lato e diagonale. Per semplicità, assumeremo il quadrato di lunghezza 1, e chiameremo d la lunghezza della diagonale. Adesso, guarda questo disegno.



Abbiamo quattro quadrati unitari che, insieme, formano un quadrato 2 per 2. Osserva che anche le diagonali formano un quadrato. Questo quadrato ha lati di lunghezza d, per cui possiamo pensarlo come un quadrato unitario scalato di un fattore d. In particolare, la sua diagonale deve essere lunga quanto quella di un quadrato unitario moltiplicata per d, per cui deve avere lunghezza d^2. D'altra parte, osservando il disegno, vediamo che la diagonale ha lunghezza 2. Ciò significa che, qualunque cosa sia d, d^2 deve essere uguale a 2. Un altro modo per rendersene conto è osservare che il quadrato d per d, occupa esattamente metà dell'area del quadrato grande. Poiché l'area del quadrato grande è 4, ciò significa, nuovamente, $d^2 = 2$.

Dunque, cos'è d? Una prima stima potrebbe essere 1 e mezzo. Ma non è così: $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ che è maggiore di 2. Possiamo provare con altri numeri: $\frac{7}{5}$ è troppo piccolo, $\frac{10}{7}$ è troppo grande, $\frac{17}{12}$ è molto vicino ma ancora non perfettamente esatto.

Allora cosa fare? Continuiamo a provare numeri all'infinito? Ciò che stiamo cercando è una proporzione tale che

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 2$$

Il solo modo in cui ciò possa accadere è che il numero di sopra a moltiplicato per se stesso sia esattamente il doppio del numero sottostante b moltiplicato per se stesso. In altre parole stiamo cercando due interi a e b tali che

$$a^2 = 2b^2 .$$

Poiché ci interessa solo il rapporto $\frac{a}{b}$, non ha senso esaminare numeri *a* e *b* che siano entrambi pari (perché potremmo semplificare i fattori di 2 in comune). Possiamo anche escludere la possibilità che *a* sia dispari: se *a* fosse un numero dispari, allora anche a^2 sarebbe dispari e non potrebbe essere il doppio di b^2.

Perché il prodotto di due numeri dispari è sempre dispari?

Dunque le coppie $\frac{a}{b}$ da considerare sono solo quelle in cui *a* è pari e *b* è dispari. Ma allora a^2 non solo è pari, ma è *il doppio* di un pari. Capisci perché?

Perché il prodotto di due numeri pari è sempre divisibile per 4?

Ora, poiché *b* è dispari, anche b^2 deve essere dispari e quindi $2b^2$ deve essere il doppio di un dispari. Ma noi vogliamo che a^2 sia *uguale* a $2b^2$. E come può il doppio di un numero pari essere uguale al doppio di un numero dispari? Non può.

Cosa significa? Significa che semplicemente non ci sono coppie di interi *a* e *b* tali che $a^2=2b^2$. In altre parole *non c'è alcuna frazione il cui quadrato sia* 2. Il rapporto tra diagonale e lato non può in alcun modo essere espresso come frazione – non importa in quanti pezzi dividiamo la nostra unità, la diagonale non ne conterrà mai un numero esatto.

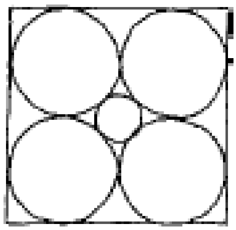
Questa scoperta può avere un effetto piuttosto sconvolgente sulle persone. Di solito, quando pensiamo di misurare qualcosa, immaginiamo che ciò richieda un numero finito di applicazioni del nostro regolo misuratore (compresa la possibilità di dividerlo in un numero finito di parti uguali più piccole). Ma non è questo il caso della realtà matematica. Piuttosto, troviamo che esistono misure geometriche (come lato e diagonale di un quadrato) che sono **incommensurabili** – che cioè non sono contemporaneamente misurabili come multipli di un'unità comune. Ciò ci costringe ad abbandonare l'idea ingenua di poter descrivere ogni misura come rapporto tra numeri interi.

Il numero *d* che abbiamo scoperto è chiamato radice quadrata di 2, e si scrive $\sqrt{2}$. Questa è semplicemente un'utile abbreviazione dell'espressione

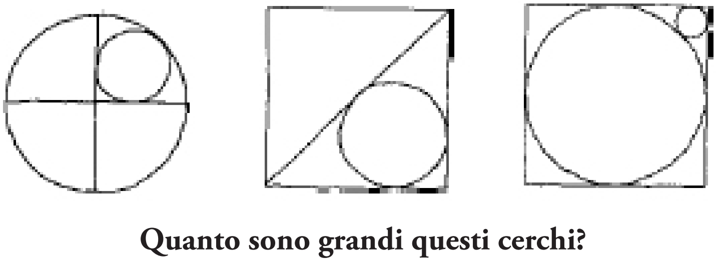
“il numero che moltiplicato per se stesso dà 2”. In altre parole, la sola cosa che conosciamo davvero su $\sqrt{2}$ è che il suo quadrato è 2. Non abbiamo speranza di dire cosa sia questo numero (almeno non come rapporto di interi), sebbene possiamo fornirne delle approssimazioni. Per esempio $\sqrt{2}=1{,}41421$. Senz'altro. Il punto è tutto qui. Vogliamo capire la *verità*.
La verità sembra essere che non possiamo in alcun modo misurare la diagonale di un quadrato. Ciò non significa che la diagonale non esista o non abbia una lunghezza. Ce l'ha. Il numero è lì; solo che non possiamo parlarne come avremmo voluto. Il problema non è nella diagonale; è nel nostro *linguaggio*. Forse è il prezzo da pagare per la bellezza matematica. Abbiamo creato un universo immaginario (l'unico posto in cui la misura è veramente possibile), ed ora dobbiamo affrontarne le conseguenze.

Numeri come questo che non possono essere espressi come frazioni, sono chiamati **irrazionali** (che significa “senza ragione”). Spuntano naturalmente in geometria e bisogna in qualche modo abituarvisi. La diagonale del quadrato è lunga esattamente $\sqrt{2}$ per il lato, e questo è tutto ciò che sappiamo veramente su di essa.

$\sqrt{3}$ è irrazionale? E $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?



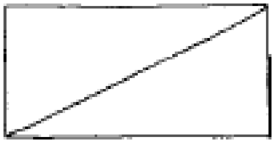
**I cerchi grandi sono larghi evidentemente la metà del quadrato.
E il cerchio piccolo?**



Quanto sono grandi questi cerchi?

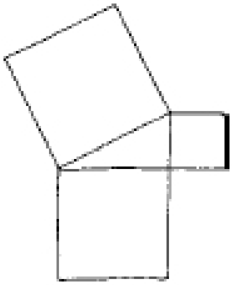
5

E la diagonale di un rettangolo?



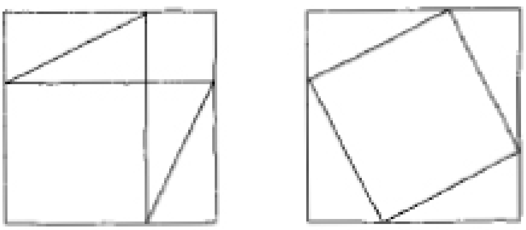
Senz'altro dipende dalla lunghezza dei lati, ma in che modo? La relazione tra la diagonale e i lati fu scoperta circa quattromila anni fa, ed è semplicemente sorprendente adesso come allora.

Nota come la diagonale taglia il rettangolo in due triangoli identici. Prendi uno di questi due triangoli e poni su ciascun lato un quadrato.

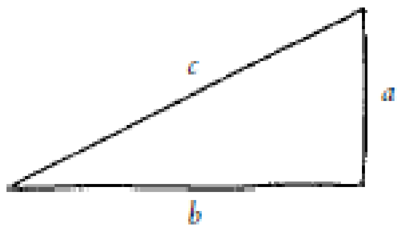


La scoperta sorprendente è questa: il quadrato grande occupa esattamente tanta area quanto la somma dei due piccoli. Non importa quale sia la forma del rettangolo, i suoi lati e la sua diagonale cospireranno sempre affinché i due quadrati si sommino in questa maniera.

Ma perché mai *tutto ciò* dovrebbe essere vero? Ecco un bel modo di vederlo attraverso un mosaico.



Il primo disegno utilizza i due quadrati piccoli, insieme a quattro copie del triangolo, per formare un quadrato grande. Il secondo disegno usa il quadrato grande (quello costruito sulla diagonale) e gli stessi quattro triangoli per formare un altro quadrato grande. Il punto è che questi due quadrati grandi sono identici; hanno entrambi lati uguali alla somma dei due lati del rettangolo. In particolare ciò significa che i due mosaici hanno la stessa area totale. Ora, se rimuoviamo i quattro triangoli da ciascuno di essi, le aree restanti devono restare uguali, per cui i due quadrati piccoli devono occupare esattamente lo stesso spazio di quello grande.



Chiamiamo *a* e *b* i lati del rettangolo e *c* la diagonale. Allora il quadrato di lato *a* e quello di lato *b*, presi insieme, hanno la stessa area del quadrato di lato *c*. In altre parole

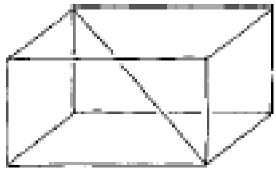
$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

Questo è il famoso **teorema di Pitagora**, che collega la diagonale e i lati di un rettangolo. Il nome deriva da quello del filosofo greco Pitagora, sebbene la scoperta sia di molto precedente, risalendo alle antiche civiltà babilonese ed egiziana.

Per esempio, troviamo che un rettangolo 1 per 2 ha diagonale di lunghezza $\sqrt{5}$. Come al solito, questo numero è disperatamente irrazionale. In genere, un rettangolo i cui lati sono dei bei numeri interi, avrà sempre una diagonale irrazionale. Questo perché il teorema di Pitagora coinvolge il quadrato della diagonale piuttosto che la diagonale stessa. D'altra parte un rettangolo 3 per 4 ha la diagonale di lunghezza 5, poiché $3^2 + 4^2 = 5^2$. Riesci a trovare altri rettangoli che si comportano così bene?

Quali rettangoli hanno misure intere sia dei lati che delle diagonali?

Che succede nella versione tridimensionale? Invece che su un rettangolo, possiamo interrogarci su una scatola rettangolare.



Come dipende la diagonale di una scatola dai suoi tre lati?

Mostra che l'altezza di un triangolo equilatero misura quanto il lato moltiplicato per $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6

Penso che adesso siamo in grado di fare qualche misurazione seria, ma prima di farlo voglio fare una domanda seria. Perché stiamo facendo ciò? A che scopo costruire queste forme immaginarie e poi provare a misurarle?

Di certo non abbiamo alcuno scopo pratico. In effetti, queste figure immaginarie sono molto più difficili da misurare di quelle reali. Misurare la diagonale di un rettangolo richiede profondità ed ingenuità; misurare la diagonale di un pezzo di carta è facile – serve soltanto un righello. Non c'è alcuna verità, alcuna sorpresa, alcun problema filosofico. No, ciò di cui ci occuperemo non ha niente a che fare con il mondo reale. Innanzitutto, le strutture che sceglieremo di misurare le sceglieremo perché sono belle e curiose, non perché sono utili. La gente non fa matematica perché è utile. La fa perché è *interessante*.

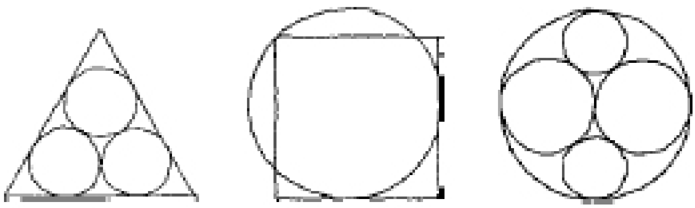
Ma che c'è di così interessante in un mucchio di misure? A chi importa quale può essere la lunghezza di una diagonale o quanto spazio può occupare una certa figura immaginaria? Questi numeri sono quelli che sono. È davvero importante quali siano?

Effettivamente, non penso lo sia. Il punto di un problema di misurazione non è quale sia la misura ma come arrivare a trovarla. La risposta al problema della diagonale di un quadrato non è $\sqrt{2}$ ma il disegno del mosaico. (Almeno questa è una risposta possibile!).

La soluzione a un problema di matematica non è un numero; è un argomento, una prova. Proviamo a realizzare queste piccole poesie di pura ragione. Ovviamente, come in ogni altra forma di poesia, vogliamo che il nostro lavoro sia tanto bello quanto significativo. La matematica è l'arte della spiegazione e, di conseguenza, è difficile, frustrante e profondamente soddisfacente.

È anche un grande esercizio filosofico. Siamo capaci di creare nella nostra mente oggetti immaginari perfetti, che dunque hanno misure immaginarie perfette. Ma riusciamo ad ottenerle? Ci sono verità lì fuori. Abbiamo accesso ad esse? È un problema sui limiti della mente umana. *Cosa riusciamo a conoscere?* Questa è la vera domanda nel cuore di ogni problema matematico.

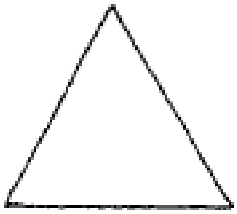
Quindi il senso di fare tutte queste misure è vedere se riusciamo. Lo facciamo perché è una sfida e un'avventura e perché è divertente. Lo facciamo perché siamo curiosi, e vogliamo capire la realtà matematica e le menti da cui è generata.



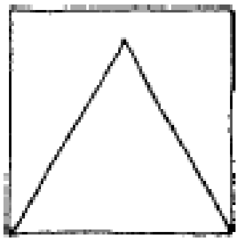
Alcuni problemi geometrici parlano da soli.

7

Iniziamo provando a misurare i poligoni regolari. Il più semplice è il triangolo equilatero.



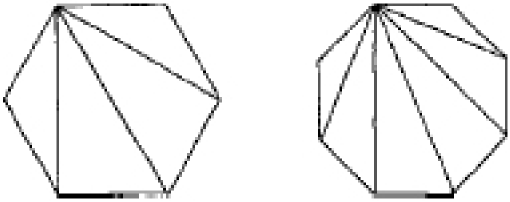
Non avendo diagonali di cui parlare, la misura interessante è l'area. Ma l'area paragonata a cosa? Essendo ogni misura relativa, non ha senso chiedersi quanto spazio occupa qualcosa senza avere qualcos'altro con cui confrontarlo. Penso che qui la scelta più naturale dovrebbe essere un quadrato con lato della stessa lunghezza del lato del triangolo. Il modo che preferisco per pensarci è immaginare il triangolo impacchettato in una scatola quadrata.



La domanda è, quanto spazio della scatola è occupato dal triangolo? (Osserva che ciò rende la domanda indipendente dalla scelta dell'unità di misura). Lì fuori c'è un certo numero, intrinseco alla natura di triangoli e quadrati, che è al di là del nostro controllo. Qual è? E, ciò che più importa, come possiamo scoprirlo?

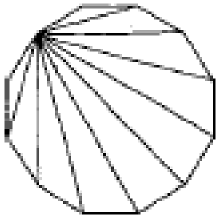
Qual è l'area di un triangolo equilatero?

Accade che alcuni poligoni regolari siano più facili da misurare di altri. A seconda del numero di lati, queste misure possono essere più o meno difficili da ottenere. Per esempio, l'esagono regolare (sei lati) e l'ottagono (otto lati) sono relativamente facili da misurare, mentre l'ettagono (sette lati) è straordinariamente difficile.



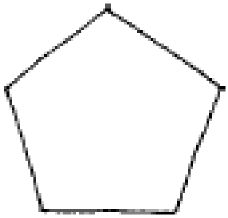
Riesci a misurare diagonali e aree di esagono e ottagono regolari?

Un altro che puoi divertirti a misurare è il dodecagono regolare (dodici lati).

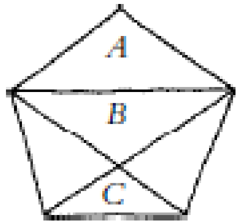


Riesci a misurare diagonali e aree del dodecagono regolare?

Uno dei problemi più belli (e impegnativi) della geometria è la misura del pentagono regolare.



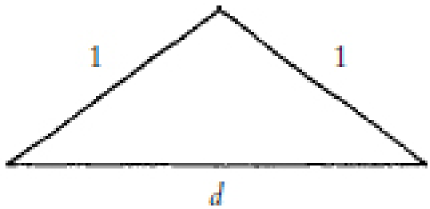
Voglio mostrarti un modo molto bello (e ingegnoso) per misurare la diagonale. Come al solito, prenderemo il lato del pentagono come unità e chiameremo *d* la lunghezza della diagonale. L'idea è di dividere il pentagono in triangoli, in questo modo:



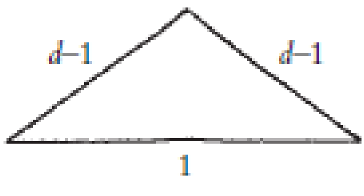
Dal disegno, sembra proprio che i triangoli *A* e *B* siano uguali. Lo sono? Sembra anche che il triangolo *C* abbia la stessa forma degli altri due, ma sia più piccolo. È così? Ci stiamo chiedendo se i tre triangoli sono simili. Ebbene lo sono. Il problema è: perché?

Perché i tre triangoli sono simili?
Perché i due più grandi sono identici?

Iniziamo col misurare i lati di questi triangoli. Il triangolo *A* ha due lati corti di lunghezza 1 ed un lato lungo di lunghezza *d*. Lo stesso accade per il triangolo *B*. Perciò questi due triangoli sono fatti così:



Nel triangolo *C*, d'altra parte è il lato lungo ad avere lunghezza 1. E i lati corti? È qui che entra in gioco l'intelligenza: un lato corto di *C* ed uno corto di *B*, insieme formano tutta la diagonale. Ciò significa che i lati di *C* devono avere lunghezza $d-1$. Ecco un disegno del triangolo *C*:



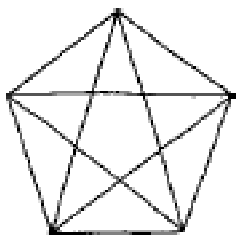
Il punto, adesso, è che questi due triangoli sono simili. Ciò significa che il grande è uguale al piccolo ingrandito di un certo fattore. Confrontando i lati lunghi dei due triangoli, ci accorgiamo che il fattore di scala deve essere proprio *d*. In particolare i lati corti del triangolo piccolo, scalati di questo fattore, devono diventare come i lati corti del triangolo grande. Ciò significa che il nostro numero *d* soddisfa la relazione

$$d(d-1)=1 \; .$$

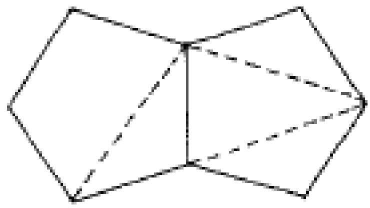
Ecco fatto. Questa è la nostra misura. Volevamo sapere il rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono regolare, ed ora lo sappiamo. È il numero che moltiplicato per quello minore di uno rispetto a se stesso, è uguale a 1. Ma che numero è questo? È un po' come quando avevamo la diagonale del quadrato; avevamo un numero che si comportava in un certo modo (quella volta risultava $d^2=2$) e, naturalmente, volevamo sapere che numero era. Scoprimmo di avere un problema di vocabolario. L'irrazionalità della radice quadrata di 2 significava che il linguaggio dei numeri interi (cioè delle frazioni) non è abbastanza espressivo per i nostri scopi. Ciò ci aveva costretto a cambiare profondamente il modo di pensare alle misure. Sarà ancora più dura, con la diagonale del pentagono?

Siamo già stati costretti ad estendere il nostro vocabolario fino ad includere non solo addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, ma anche radici quadrate. Ciò fornisce un linguaggio abbastanza forte da esprimere le misure dei quadrati e anche dei rettangoli. È sufficiente anche per i pentagoni? O dobbiamo estenderlo ulteriormente?

Il problema non è cosa sia *d* – sappiamo cos'è *d*. È il numero che soddisfa la relazione $d(d-1)=1$. Il problema è se questo numero possa essere espresso in termini di radici quadrate. Osserva che non stiamo più facendo geometria. Il problema si è trasformato da uno su forme e misure in uno su linguaggio e rappresentazione. Il nostro linguaggio è abbastanza potente da consentirci di districare la relazione $d(d-1)=1$, per ottenere proprio d? Ebbene, lo è.



Quanto è grande il pentagono piccolo?



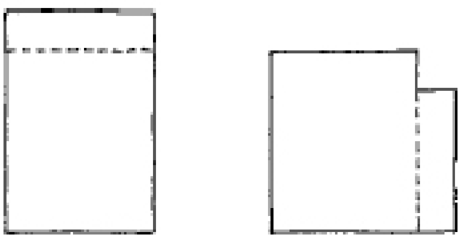
Usa questa configurazione di due pentagoni per dimostrare che la diagonale *d* verifica l'equazione $d^2 = d + 1$.

8

Ingarbugliare e districare relazioni numeriche è ciò che viene chiamato **algebra**. Questo tipo di matematica ha una storia molto lunga e affascinante, risalente agli antichi Babilonesi. In effetti, la tecnica di cui voglio parlarti ha circa 4 mila anni.

Il motivo per cui è difficile districare qualcosa come $d(d-1)$ è che, anziché essere un quadrato (di cui si potrebbe estrarre la radice), è prodotto di due numeri diversi. Ciò che scoprirono i babilonesi è che il prodotto di due numeri può sempre essere espresso come *differenza di due quadrati.* Ciò consente di riscrivere le relazioni in termini di quadrati, in modo da poter utilizzare le radici quadrate per districarle.

Un modo in cui mi piace vederlo è immaginare i due numeri come lati di un rettangolo, in modo che il prodotto sia l'area. Dunque l'idea è di livellare i lati di questo rettangolo, tagliando un po' di superficie dalla parte di sopra e riattaccandola a lato.



Si realizza così una forma quadrata con un incavo quadrato; in altre parole, una differenza di quadrati. In questo modo, togliamo dal lato lungo esattamente tanto quanto mettiamo al lato corto. Ciò significa che il lato del quadrato sarà la *media* dei due lati del rettangolo.

Per quanto riguarda il quadrato incavato, il suo lato è lungo esattamente tanto quanto i due lati del rettangolo differiscono dalla loro media. Chiamiamo questa misura *scarto*. Quindi, ciò che stiamo dicendo è questo: il prodotto di due numeri è uguale al quadrato della loro media meno il quadrato del loro scarto. Per esempio $11\times15=13^2-2^2$.
Se a è la media di due numeri e s è il loro scarto, allora i numeri saranno $a+s$ e a-s. Il nostro risultato può quindi essere scritto:

$$(a+s)(a-s)=a^2-s^2.$$

Questa viene talvolta chiamata formula della *differenza di quadrati*. Che bel pezzo di antica arte babilonese! Adesso, invece, ecco un po' d'arte per te.

Costruisci il disegno di un mosaico che dimostri la relazione algebrica $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

Supponi di avere la somma e la differenza di due numeri. Come puoi trovare i due numeri? E se hai la somma e il prodotto?

Usiamo il metodo babilonese per ottenere una nuova descrizione di d. La media di d e d-1 è $d-\frac{1}{2}$ e lo scarto è $\frac{1}{2}$, per cui abbiamo

$$d(d-1)=(d-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2.$$

Adesso possiamo riscrivere la nostra relazione $d(d-1)=1$ come

$$d(d-1)=(d-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$$

e quindi

$$(d-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}.$$

Quindi, finalmente, possiamo estrarre la radice quadrata ed ottenere:

$$d = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$$

o, se preferisci,

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad .$$

Il nostro numero è ora espresso esplicitamente in termini di numeri interi e radici quadrate.

Mostra che tra tutti i rettangoli di un certo perimetro fissato, il quadrato ha l'area maggiore.

Trova un rettangolo che abbia stessa area e perimetro di un triangolo equilatero assegnato.

Un "rettangolo aureo" ha la proprietà che, quando si rimuove un quadrato, il rettangolo rimanente è simile all'originale. Quali sono le proporzioni di un rettangolo aureo?

9

Quindi è così: la diagonale del pentagono può essere espressa in termini di radici quadrate. In particolare è facile ricavare dall'espressione $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

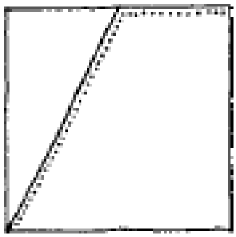
che d è un numero irrazionale, approssimativamente uguale a 1,618. Ovviamente, avremmo potuto ottenere quest'informazione direttamente dal fatto che $d(d-1)=1$. In effetti, le due espressioni sono perfettamente equivalenti e ci danno esattamente le stesse informazioni su d. Non c'è la minima differenza di contenuto matematico tra le due.

Immagino che da un punto di vista cinico sulla situazione, potrebbe sembrare che abbiamo fatto tanti sforzi senza giungere da alcuna parte. Abbiamo iniziato con una descrizione di d come "il numero che moltiplicato per quello minore di 1 rispetto ad esso da 1" e abbiamo finito con una descrizione di d come "metà di uno più il numero il cui quadrato è 5". È un progresso? Se tutta l'informazione su d è contenuta nell'equazione originale, perché ci affliggiamo a risolverla?

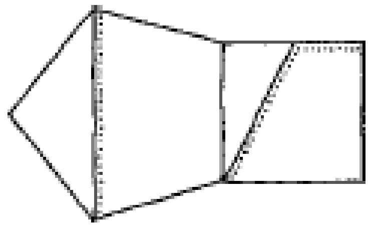
D'altro canto, perché ci affliggiamo a cuocere il pane? Potremmo semplicemente mangiare gli ingredienti grezzi.

Fare algebra non è risolvere equazioni; è riuscire a muoversi avanti e dietro tra varie rappresentazioni equivalenti, a seconda della situazione che abbiamo e a seconda del nostro gusto. In questo senso, ogni manipolazione algebrica è psicologica. I numeri ci si presentano in vari modi, ed ogni rappresentazione diversa ha il suo effetto e può darci idee che non ci sarebbero venute altrimenti.

Per esempio, la rappresentazione $d=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$ mi fa pensare a questo disegno:



Questo cammino tra gli angoli opposti di un quadrato è fatto di due pezzi. La parte orizzontale è lunga 1/2, e la parte inclinata non è altro che la diagonale di un rettangolo 1X1/2. Il teorema di Pitagora dice che la lunghezza di questa diagonale è $\sqrt{\frac{5}{4}}$. Ciò significa che la diagonale di un pentagono (che era molto difficile da misurare) è lunga esattamente quanto questo semplice cammino su un quadrato.

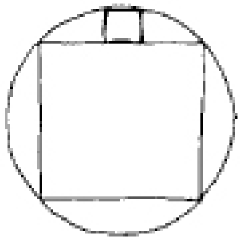


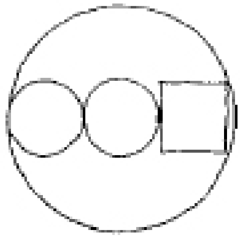
Questa è bella. E totalmente inaspettata. Non ci sarei mai arrivato senza quell'espressione particolare di *d*. In effetti, anche se ci fossi arrivato (per esempio giocando con carta e righelli), non avrei avuto modo di pronunciarmi sulla sua verità nella realtà matematica, figuriamoci a spiegare perché, senza in qualche modo ottenere quelle due espressioni su *d* e mostrare la loro equivalenza. Ovviamente, se avessi in qualche modo ipotizzato che $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sarebbe stato abbastanza facile dedurne che $d(d-1)=1$. Il bello di questa tecnica babilonese è che ci consente di esprimere *d* esplicitamente, senza dover essere così bravi a fare ipotesi.

In generale, lo scopo principale del geometra è di tradurre informazioni geometriche in informazioni algebriche e viceversa. Non è tanto un problema tecnico quanto uno creativo. L'idea *reale* era la dissezione del pentagono in triangoli simili. Da dove è venuta un'idea simile? Come si può inventare una cosa del genere? Non lo so. La matematica è un'arte, e il genio creativo un mistero. Ovviamente la tecnica aiuta – un buon pittore conosce la luce e l'ombra, un buon musicista ha una conoscenza completa dell'armonia e un buon matematico sa districare informazioni algebriche – ma un bel pezzo di matematica è tanto difficile da realizzare quanto un bel ritratto o una sonata.

Qual è l'area del pentagono regolare?

Ancora una volta, non posso proprio aiutarti; sei da solo. C'è una tela bianca davanti a te, e ti serve un'idea. Forse ne avrai una, forse no. L'arte è così.

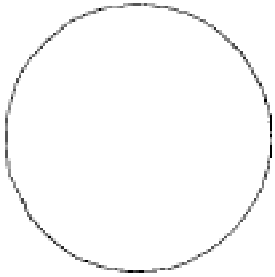




Due dei miei favoriti.

10

E il cerchio? Certo non potresti chiedere forma più bella.

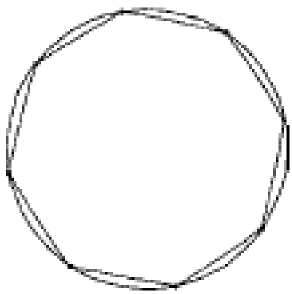


I cerchi sono semplici, simmetrici ed eleganti. Ma come possiamo mai riuscire a misurarli? Più in generale, come potremo mai misurare *una qualunque* forma curva?

La prima cosa da osservare in un cerchio è che tutti i punti del bordo sono alla stessa distanza dal centro. Il che, dopo tutto, è ciò che lo rende un cerchio. Questa distanza è chiamata **raggio** del cerchio. Poiché tutti i cerchi hanno la stessa forma, è proprio il raggio a fare la differenza tra un cerchio e l'altro.

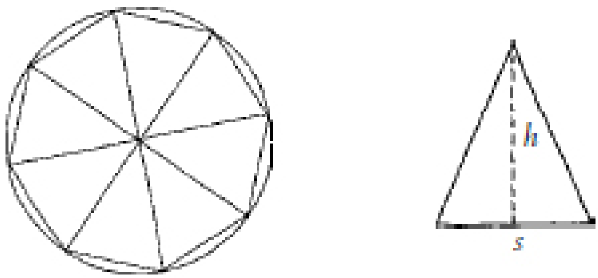
Il perimetro di un cerchio è chiamato **circonferenza** (dal latino *circumferéntia*, che gira attorno). Penso che le misure più naturali da fare su un cerchio siano l'area e la circonferenza.

Iniziamo con qualche approssimazione. Se piazziamo un certo numero di punti ugualmente distanziati intorno al cerchio, e poi colleghiamo quelli consecutivi, otteniamo un bel poligono regolare.



L'area e il perimetro di questo poligono sono più piccole delle corrispondenti misure del cerchio, ma vanno abbastanza vicine. Se avessimo usato più punti, avremmo potuto fare anche meglio. Supponiamo di usare un gran numero di punti, diciamo *n*. Allora abbiamo un *n*-gono regolare con area e perimetro molto vicine agli effettivi area e circonferenza del cerchio. La cosa importante è che aumentando il numero di lati del poligono, l'approssimazione diventa sempre migliore.

Qual è l'area di questo poligono? Dividiamolo in *n* triangoli identici.



Ogni triangolo ha larghezza uguale al lato del poligono, diciamo *s*. L'altezza di ogni triangolo è la distanza tra il centro del cerchio e il lato del poligono. Sia *h* questa distanza. Allora ogni triangolo avrà area $\frac{1}{2}hs$. Ciò significa che l'area del poligono è $\frac{1}{2}hsn$. Osserva che *sn* è il perimetro del poligono. Quindi possiamo affermare:

$$\textit{area del poligono} = \frac{1}{2}hp$$

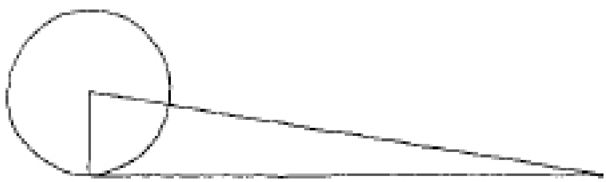
dove p è il perimetro. Abbiamo una descrizione precisa dell'area di un poligono regolare in termini del suo perimetro e della distanza dal centro al lato.

Ma che succede quando il numero dei lati n aumenta indefinitamente? Il perimetro p sarà sempre più vicino alla circonferenza C del cerchio, e la distanza h si avvicinerà al raggio r. Ciò significa che l'area del poligono dovrà avvicinarsi a $\frac{1}{2}rC$. Ma l'area del poligono si avvicina anche alla vera area A del cerchio! La sola conclusione possibile è che questi numeri devono essere entrambi uguali a

$$A = \frac{1}{2}rC$$

L'area del cerchio è esattamente metà del prodotto di raggio e circonferenza.

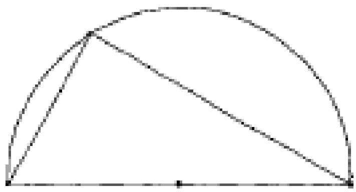
Un bel modo di pensarci è immaginare di srotolare la circonferenza lungo una linea, in modo che formi un triangolo rettangolo con il raggio.



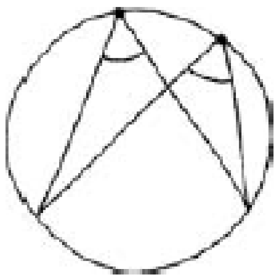
Ciò che la nostra formula ci sta dicendo è che il cerchio occupa esattamente la stessa quantità di spazio di questo triangolo.

É appena accaduto qualcosa di veramente importante. In qualche modo abbiamo ottenuto una descrizione esatta dell'area di un cerchio usando nient'altro che approssimazioni. Il punto è che non abbiamo fatto solo qualche buona approssimazione, ne abbiamo fatte *infinite*. Abbiamo costruito una sequenza infinita di approssimazioni via via migliori, e in esse c'era abbastanza regolarità da poter dire dove ci avrebbero condotto. In altre parole, una sequenza infinita di bugie *con un pattern*, può dirci la verità. Questa è probabilmente l'idea più grande che la razza umana abbia mai avuto.

Questa tecnica stupefacente, nota come **metodo di esaustione**, fu inventata dal matematico greco Eudosso (un allievo di Platone) intorno al 370 a.C. Essa consente di misurare forme curve costruendo una sequenza infinita di approssimazioni rettilinee. Il trucco è farlo in modo tale che le approssimazioni abbiano qualche regolarità – una lista infinita di numeri casuali non ci dice niente. Non è sufficiente avere una sequenza infinita; dobbiamo essere capaci di *leggerla*.



Quando un punto della circonferenza è collegato ai vertici di un diametro, forma sempre un angolo retto. Perché?



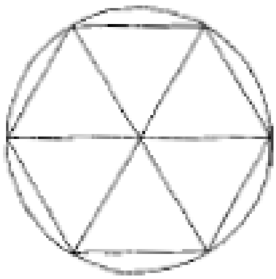
Mostra che se due punti sono collegati allo stesso arco, gli angoli risultanti devono essere uguali.

11

Abbiamo espresso l'area di un cerchio in termini della sua circonferenza. Ma possiamo misurare la circonferenza? In un quadrato, è naturale misurare il perimetro in rapporto alla lunghezza del lato – il rapporto tra la lunghezza intorno e la lunghezza attraverso. Possiamo fare lo stesso con un cerchio.

La distanza attraverso un cerchio è chiamata **diametro** (ovviamente è semplicemente il doppio del raggio). Quindi l'analoga misura per un cerchio dovrebbe essere il rapporto tra circonferenza e diametro. Poiché tutti i cerchi sono simili, questo rapporto è lo stesso per ogni cerchio ed è denotato con la lettera greca pi, o π. Questo numero sta ai cerchi come 4 sta ai quadrati.

Non è difficile approssimare pi. Per esempio supponiamo di mettere un esagono regolare dentro un cerchio.



Il perimetro dell'esagono è esattamente il triplo del diametro. Poiché la circonferenza del cerchio è un po' più lunga, osserviamo che π è un po' più grande di 3. Se usiamo poligoni con più lati possiamo ottenere stime migliori. Archimede (250 a.C. circa) usò un 98-gono per ottenere $\pi \approx \frac{22}{7}$. Molta gente crede che questa sia un'uguaglianza esatta, ma non lo è. Il valore effettivo è un po' più piccolo, e $\pi \approx 3{,}1416$ ne è un'approssimazione decente. Ancora migliore è la stima cinese del quinto secolo $\pi \approx \frac{355}{113}$.

Ma quant'è esattamente pi? Bene, la notizia è piuttosto cattiva. Pi è un irrazionale (ciò è stato provato da Lambert nel 1768), quindi non c'è speranza di esprimerlo come rapporto di numeri interi. In particolare, non è possibile misurare con interi sia il diametro che la circonferenza.

In realtà la situazione è anche peggiore di quanto fosse per la diagonale del quadrato. Sebbene sia irrazionale, $\sqrt{2}$ è almeno descrivibile come "il numero il cui quadrato è 2". In altre parole questo numero soddisfa una relazione che può essere espressa nel linguaggio dell'aritmetica dei numeri interi; precisamente è il numero x tale che $x^2 = 2$. Non sappiamo dire cos'è, ma sappiamo dire cosa fa.

Per pi è diverso. Non solo non si può esprimere come frazione, ma in effetti non soddisfa alcuna relazione algebrica di alcun tipo. Che fa pi? Non fa niente. È quello che è. Numeri come questo sono chiamati **trascendenti** (dal latino *trascéndere*, superare). I numeri trascendenti – e ce ne sono molti- sono semplicemente oltre il potere descrittivo dell'algebra. Lindemann nel 1882 ha dimostrato che pi è trascendente. È straordinario riuscire a comprendere una cosa del genere.

D'altra parte, i matematici hanno trovato descrizioni alternative di π. Per esempio, nel 1674 Leibniz scoprì la formula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

L'idea è che più termini addizioni sulla destra, più la somma si avvicina al numero di sinistra. Dunque pi può essere espresso come una *somma infinita*. Ciò, perlomeno consente una descrizione puramente numerica di pi, ed è anche filosoficamente piuttosto interessante. E, cosa più importante, rappresentazioni del genere sono tutto ciò che abbiamo.

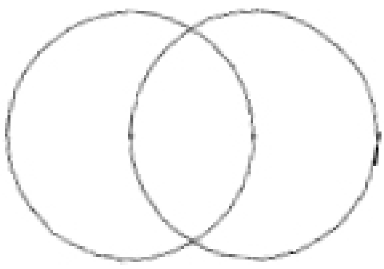
Questo è quanto. Il rapporto tra circonferenza e diametro è pi, e non possiamo farci niente. Dobbiamo soltanto estendere il nostro linguaggio per includerlo.

In particolare, un cerchio di raggio 1 ha diametro 2, e quindi la sua circonferenza è 2π. L'area di questo cerchio è metà del prodotto di raggio e circonferenza, che è semplicemente π. Ingrandendo di un fattore r, troviamo che per un cerchio di raggio r, circonferenza e area sono date da

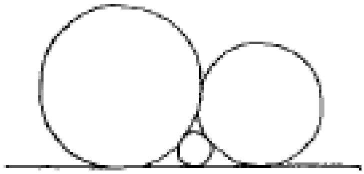
$$C = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2 .$$

Osserva che la prima equazione è praticamente priva di contenuto; è una semplice riaffermazione della definizione di pi. La seconda equazione è quella realmente profonda ed è equivalente alla nostra scoperta che l'area di un cerchio è metà del prodotto di raggio e circonferenza.



Se due cerchi sono disposti in modo tale che ciascuno passi per il centro dell'altro, quali sono area e perimetro dell'intersezione? Che succede con tre cerchi?

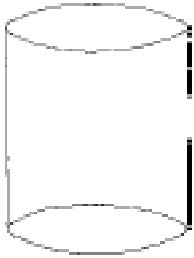


Due cerchi sono su una linea e si toccano reciprocamente in un punto. Un cerchio piccolo è inscritto nello spazio tra essi. Come dipende il raggio di quest'ultimo dai raggi dei due cerchi più grandi?

12

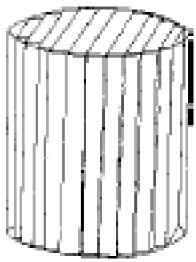
Voglio dire qualcos'altro sul metodo di esaustione. L'idea è di ottenere in qualche modo misure esatte da una sequenza infinita di approssimazioni, come quando abbiamo misurato cerchi attraverso una sequenza infinita di poligoni. Questa è di gran lunga la più potente e flessibile tecnica di misurazione mai ideata. Innanzitutto, riduce la misura di forme curve a quella di forme dritte. È già sorprendente poter dire *qualcosa* di preciso sulle forme curve, senza tener presente che possiamo farlo in maniera tanto bella e profonda.

Come altro esempio di questa tecnica, lasciami mostrarti un bel modo per misurare il volume di un cilindro.



Un cilindro è un oggetto interessante. Ha qualcosa di tondo e qualcosa di dritto. Sembra una via di mezzo tra un cubo e una sfera. In ogni modo, ha due estremità che sono cerchi (della stessa misura), uno ad una certa altezza sopra l'altro.

Un modo di approssimare il volume di un cilindro è immaginare di affettarlo verticalmente in un gran numero di lastre sottili, approssimabili a scatole rettangolari.



Osserva che i rettangoli alla base di queste scatole approssimano bene l'area della base circolare del cilindro. Aumentando il numero di fette, il volume totale delle scatole si avvicina al volume vero del cilindro, e l'area dei rettangoli a quella vera del cerchio.

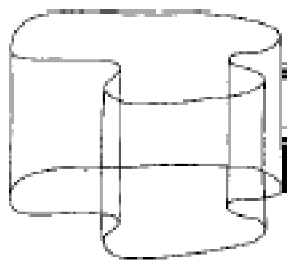
Adesso, il volume di una scatola rettangolare è semplicemente il prodotto dell'altezza per l'area di base, per cui il volume totale di tutte le scatole sarà l'altezza per l'area totale dei rettangoli di base. Qui abbiamo utilizzato il fatto che tutte le scatole hanno esattamente la stessa altezza. Ciò significa che il volume approssimato del cilindro è uguale all'altezza moltiplicata per l'area di base approssimata.

Questo è un pattern sufficiente a consentire una reale misurazione del cilindro. Man mano che il numero di fette aumenta, e l'approssimazione diventa migliore, il prodotto dell'altezza e dell'area della base rettangolare si avvicinano sia al volume del cilindro che al prodotto dell'altezza e dell'area della base circolare. Dunque devono essere uguali. In altre parole, il metodo di esaustione ha funzionato. Il volume di un cilindro è semplicemente il prodotto dell’altezza e dell'area di base.

Mi vengono in mente due cose. Una è che questo risultato potrebbe sembrarti ovvio. È chiaro intuitivamente che la quantità di spazio occupata da un cilindro debba essere proporzionale sia all'altezza che all'area di base?

Odio essere nella posizione di chi spiega qualcosa di ovvio. D'altra parte, è bene combinare intuizione e ragionamento – la matematica è questo.

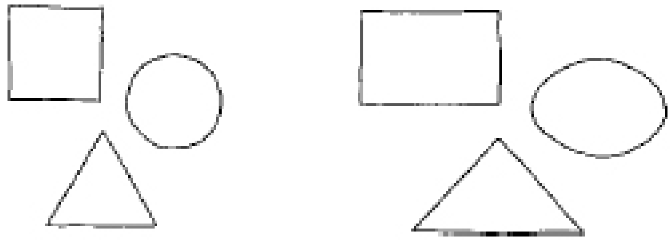
L'altra cosa è che forse affettare il cilindro in questo modo potrebbe sembrare brutto e innaturale. Dopo tutto, quando abbiamo misurato i cerchi, li abbiamo tagliati in simmetrici e piacevoli disposizioni di triangoli. Perché non tagliamo il cilindro verticalmente con spicchi triangolari che attraversano il centro del cerchio? Ebbene, questa è una critica perfettamente valida. Lasciami rispondere (come se non fossi stato io a sollevarla!) con un altro esempio.



Quest'oggetto è fatto allo stesso modo del cilindro, tranne per il fatto che le facce inferiore e superiore non sono più necessariamente dei cerchi ma qualche altra figura. Chiamiamo una cosa del genere **cilindro generalizzato**. In questo caso non c'è un bel modo simmetrico per tagliarlo, per cui l'idea delle fette rettangolari è buona quanto qualunque altra. Di nuovo otteniamo il volume del cilindro generalizzato come prodotto dell'altezza per l'area di base. Voglio dire che affettare in questo modo funziona che ci sia o meno la simmetria. È un buon esempio della flessibilità del metodo di esaustione.

Come possiamo misurare l'area laterale di un cilindro (generalizzato)?

Ora voglio mostrarti quanto sia potente il nostro metodo. Prima, abbiamo parlato di dilatazione. È l'idea di allungamento in una sola direzione di un certo fattore. A volte mi piace pensarla come una trasformazione dell'intera superficie del piano, ottenuta tirando i lati opposti di un foglio di gomma. Qualunque forma o figura disegnata sul piano verrà corrispondentemente dilatata. Supponiamo di avere delle forme e di sottoporle ad una dilatazione (orizzontale) di qualche fattore.

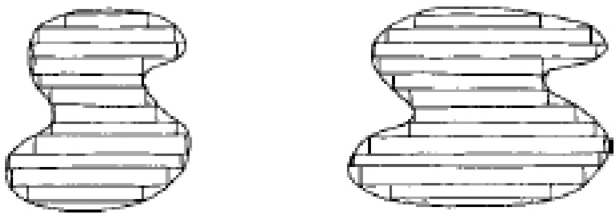


Osserva quanto drammaticamente sono cambiate le forme. Per esempio, il quadrato è diventato un rettangolo (poiché i suoi lati non sono più della stessa lunghezza). Il triangolo equilatero si è trasformato in un mero triangolo isoscele, e il cerchio è diventato una forma completamente nuova nota come **ellisse**.

In generale, la dilatazione è un processo abbastanza distruttivo. Lunghezze e angoli vengono spesso severamente distorte. In particolare, in genere non c'è alcuna relazione tra il perimetro di una forma prima della dilatazione e il suo perimetro dopo. Il perimetro di un'ellisse, per esempio, è un classico problema di misura molto difficile, soprattutto perché non ha relazione con la circonferenza del cerchio.

D'altra parte, la dilatazione risulta molto compatibile con l'area. Abbiamo già visto come una dilatazione modifichi l'area dei rettangoli: se un rettangolo è dilatato di un certo fattore (in una direzione parallela a uno dei suoi lati) allora la sua area viene moltiplicata per lo stesso fattore. Usando il metodo di esaustione, possiamo vedere che ciò resta vero per qualunque tipo di forma. Per essere precisi, supponiamo di avere una certa forma, e dilatiamola di un fattore r in qualche direzione. Vogliamo provare che l'area della forma viene moltiplicata per r.

L'idea è di affettare la nostra forma in sottili strisce rettangolari, parallele alla direzione di dilatazione, in modo che l'area della nostra forma sia ben approssimata dall'area totale dei rettangoli.

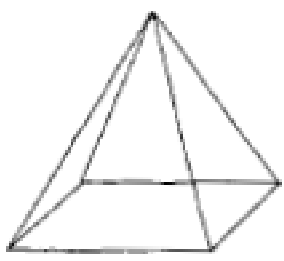


Dopo la dilatazione, anche le strisce si dilatano, in modo che le loro aree vengano moltiplicate di un fattore r. Ciò significa che l'area approssimata della forma dilatata è esattamente r volte l'area approssimata dell'originale. Aumentando indefinitamente il numero di strisce (in modo che il loro spessore si avvicini a zero), vediamo che anche le vere aree devono essere collegate da un fattore r. Trovo abbastanza sorprendente e meraviglioso che resti traccia dell'area di una forma anche dopo una tale distorsione.

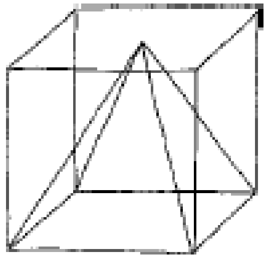
Qual è l'area di un'ellisse?

Similmente, una dilatazione dello spazio di un certo fattore in una data direzione, moltiplicherà il volume di quel fattore. Capisci perché? Poiché le scatole si comportano bene rispetto alla dilatazione, ogni cosa lo farà. Ovviamente, ci vuole una certa attenzione. Per esempio, se un oggetto solido è dilatato di un fattore 2, il suo volume sarà senz'altro raddoppiato, ma la superficie della sua area in genere farà pazzie. Prova con un cubo!

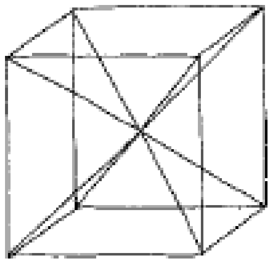
Ora voglio mostrarti una misurazione davvero bella (spero che lo siano tutte quelle che ti mostrerò). Misureremo il volume di una piramide.



Il modo che preferisco per fare ciò è posizionare una piramide in una scatola con stessa base e stessa altezza. Mi piace pensare a questa scatola come ad una valigetta per trasportare la piramide.



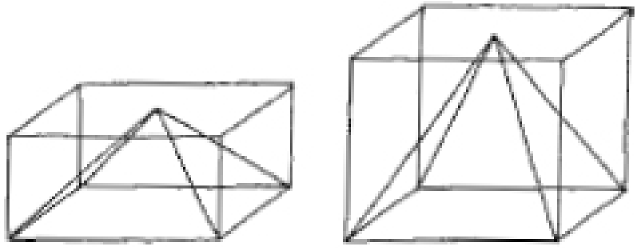
La domanda naturale è, quanta parte del volume della scatola è occupato dalla piramide? Questo è un problema piuttosto difficile. È anche molto vecchio, poiché risale (ovviamente) all'antico Egitto. Un modo per iniziare è osservare - molto abilmente – che un cubo può essere diviso in piramidi unendo il centro ad ognuno dei suoi otto vertici.



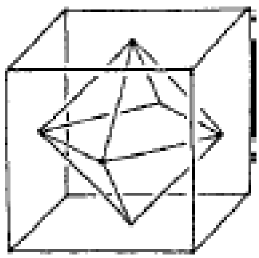
Ci sono 6 di queste piramidi perché ce n'è una per ogni faccia del cubo. Queste piramidi sono tutte identiche, quindi ognuna deve avere volume uguale ad 1/6 del cubo. La valigetta per una di queste piramidi sarebbe metà del cubo. Quindi queste piramidi occupano esattamente un terzo del volume delle valigette in cui sono contenute. Penso sia davvero un bell'argomento.

Il problema è che funziona solo per quella particolare forma di piramide (in cui l'altezza è esattamente metà della lunghezza di un lato della base). Molte piramidi si guarderanno bene dal comportarsi così bene. Saranno troppo inclinate o troppo basse.

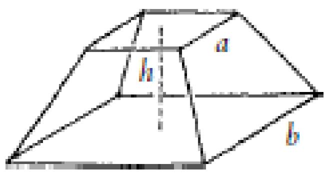
Significa che possiamo misurare un solo tipo di piramidi? No di certo. Il punto è che *qualsiasi* piramide può essere ottenuta da una di queste speciali attraverso dilatazioni appropriate. Se ne abbiamo una più inclinata, basta dilatare verticalmente del fattore che occorre per raggiungere l'altezza che abbiamo.



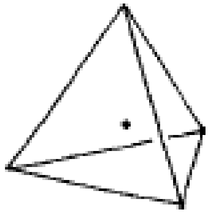
Adesso, ecco la mia parte favorita: la dilatazione modifica il volume della piramide e il volume della valigetta esattamente allo stesso modo. Saranno entrambe moltiplicate per il fattore di dilatazione. Ciò significa che il rapporto tra i due volumi resta inalterato. Poiché la proporzione era 1/3 per le piramidi speciali, deve rimanere la stessa per tutte le piramidi. Quindi il volume di una piramide è esattamente 1/3 del volume della scatola in cui è rinchiusa. Amo questa sequenza di idee. Osserva in che modo sottile e potente il metodo di esaustione gioca il suo ruolo.



I centri delle facce di un cubo possono essere uniti a formare un ottaedro regolare. Quanto del volume del cubo occupa?



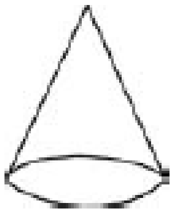
Un quadrato di lato *a* è piazzato ad un altezza *h* su un quadrato di lato *b*, a formare una piramide incompleta. Come dipende il suo volume da *a*, *b* e *h*?



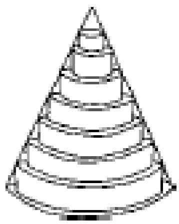
Dov'è il centro di un tetraedro regolare?

13

Proviamo a misurare il volume di un cono.



Spero tu sia d'accordo nel considerare questa una forma bella e interessante. Ovviamente, occorre qualche sorta di tecnica esaustiva, e la prima idea che viene in mente è di approssimare il cono con una pila di piccoli cilindri.



Aumentando il numero di fette e rimpicciolendo i cilindri, il loro volume totale si avvicina al volume reale del cono. Ciò che resta da fare è scoprire quale pattern si cela dietro queste approssimazioni e vedere dove ci conducono.

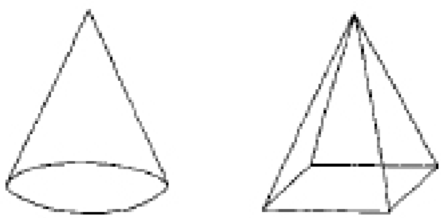
Sfortunatamente, ciò non sembra facile. Il volume di ogni cilindro dipende dal suo raggio, e questi raggi variano spostandosi su e giù lungo il cono. È un po' delicato. In effetti, ci vorrebbe un algebrista piuttosto esperto per leggere questo pattern e capirne il comportamento.

Riesci a scoprire il pattern di queste approssimazioni?

La verità è che l'esaustione può essere una tecnica quasi impossibile da mettere in pratica. Anche quando una forma è relativamente semplice ed abbiamo un modo molto schematico per approssimarla, la sequenza risultante di approssimazioni può avere un pattern semplicemente troppo sfuggevole da predire. Una cosa è dire che capiremo dove ci conduce la sequenza, un'altra cosa è capirlo davvero. Se la nostra forma è troppo complicata, diventa quasi impossibile. Quindi, come risolveremo il nostro problema?

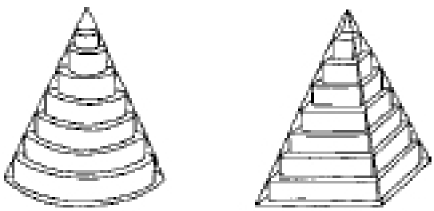
Un principio estetico universalmente accettato dai matematici è che *il modo migliore per risolvere un problema è trovare un modo ingegnoso per non doverlo risolvere affatto*.

Dunque, non misureremo direttamente il volume del cono. Lo confronteremo, piuttosto con un altro oggetto di cui abbiamo già capito il volume – la piramide.

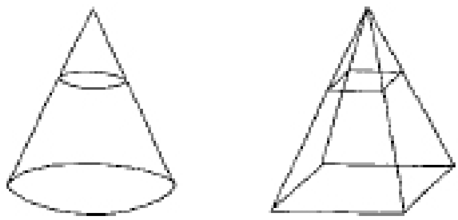


Immagina una piramide della stessa altezza del cono, con base quadrata della stessa area della base circolare del cono. L'idea consiste nel provare che questi due oggetti hanno lo stesso volume.

Per far questo, torniamo alla nostra idea delle fette. Questa volta affetteremo sia il cono che la piramide.



Il cono è approssimato da una pila di cilindri, e la piramide da una pila di scatole rettangolari. Se facciamo questo nel modo giusto, allora ogni cilindro corrisponderà ad una scatola dello stesso spessore. Le basi di questi pezzi saranno le **sezioni trasversali** del cono e della piramide.



Osserva che quando affettiamo un cono in questo modo, determiniamo un piccolo cono sulla sommità. Il cono piccolo ha esattamente la stessa forma dell'originale, solo più piccola. In altre parole, è una versione in scala ridotta del cono grande. Lo stesso vale per la piramide. In effetti, poiché il cono e la piramide hanno la stessa altezza, il fattore di scala deve essere lo stesso per entrambe le forme. Poiché il cono originale e la piramide hanno aree di base uguali, così dev'essere per le loro versioni in scala.

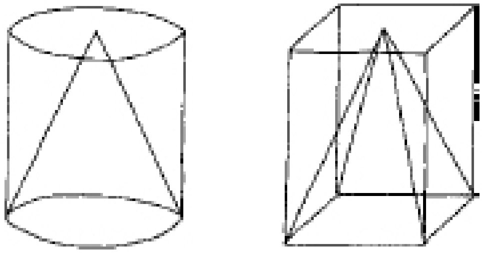
Quello a cui voglio arrivare è che, a qualunque altezza, il cono e la piramide hanno sezioni trasversali della stessa area.

Ciò significa, tornando alla nostra approssimazione del volume, che cilindri e scatole corrispondenti, hanno basi uguali. Ma, avendo anche gli stessi spessori, i loro volumi coincideranno. Quindi ogni piccolo cilindro ha esattamente lo stesso volume della scatola corrispondente. Ciò significa che, qualunque sia il numero di fette che facciamo, le approssimazioni del cono e della piramide coincidono.

Via via che le fette diventano più sottili, queste approssimazioni tenderanno contemporaneamente al volume del cono e a quello della piramide. Quindi questi due volumi devono essere esattamente uguali. In altre parole, il volume di un cono è uguale al volume di una piramide con la stessa altezza e la stessa area di base.

Quel che mi piace è che non dobbiamo scoprire quali sono i pattern di queste approssimazioni, ma soltanto che sono uguali. Riusciamo ad evitare un difficile calcolo algebrico effettuando un confronto ben scelto.

Per rendere il tutto ancora migliore, mettiamo il nostro cono in un cilindro. È analogo al riporre la piramide in una scatola.



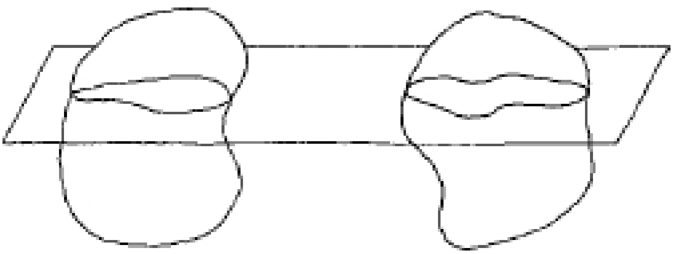
Poiché il cilindro e la scatola hanno le stesse dimensioni di base e altezza, devono avere anche lo stesso volume. In particolare, il cono deve occupare esattamente un terzo della sua valigetta esattamente come la piramide.

Riesci a misurare la superficie laterale di un cono?

Riesci a trovare una sezione trasversale del cubo che sia un esagono regolare?

Ebbene, il cono non è che la punta dell'iceberg. Quest'idea di confronto è molto più generale. Ogni oggetto solido può essere approssimato da una pila di cilindri (generalizzati) sottili, e se due oggetti possono essere disposti in modo da avere sezioni trasversali uguali, allora il metodo di esaustione ci garantisce che avranno lo stesso volume.

Questo è un principio molto antico e bello, noto come **principio di Cavalieri**. (Sebbene originariamente sviluppata da Archimede, questa tecnica è stata riscoperta nel 1630 dall'allievo di Galileo Bonaventura Cavalieri). L'idea è di non calcolare i volumi ma confrontarli; il segreto è scegliere bene gli oggetti da confrontare.



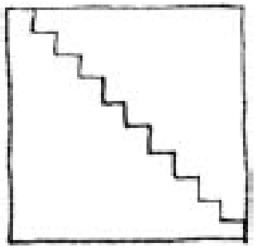
Per usare il principio di Cavalieri, è necessario posizionare i due oggetti nello spazio in modo che per *ogni* piano orizzontale secante, le sezioni trasversali corrispondenti abbiano la stessa area. (In particolare gli oggetti devono avere la stessa altezza). Ciò ci assicura che qualunque sia la validità dell'approssimazione cilindrica, continueranno ad avere volumi uguali.

È anche importante capire che questo non è il solo modo in cui due oggetti possono avere lo stesso volume. È facile trovare oggetti solidi dello stesso volume che non hanno sezioni trasversali uguali.

Sfortunatamente il principio di Cavalieri non funziona per l'area della superficie. Le approssimazioni cilindriche buone per il volume non fanno un buon lavoro nell'approssimare la superficie laterale. (Questo è un passaggio piuttosto sottile). In ogni caso, ci sono molti oggetti con sezioni trasversali uguali e superfici laterali diverse.

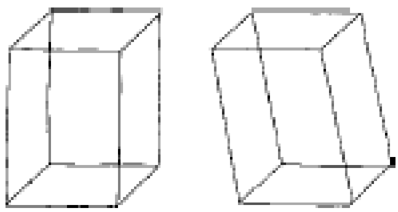
Riesci a trovare due oggetti con sezioni trasversali uguali e superfici laterali diverse?

Riesci a trovare un principio di Cavalieri per le aree su un piano?



Perché il metodo di esaustione non può essere usato per misurare la diagonale di un quadrato?

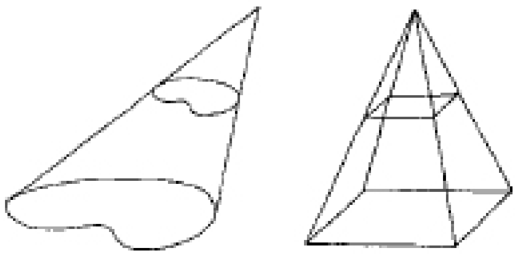
Un modo molto semplice per usare il principio di Cavalieri si ha quando i due oggetti hanno sezioni trasversali identiche. Cioè quando, non solo le sezioni trasversali hanno la stessa area, ma hanno proprio esattamente la stessa forma.



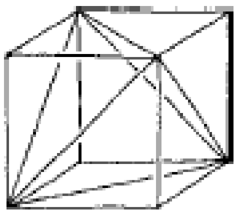
Queste due scatole hanno la stessa base quadrata e la stessa altezza, ma una è dritta e l'altra è inclinata. Se osserviamo le sezioni trasversali orizzontali, possiamo vedere che sono tutte esattamente le stesse – lo stesso quadrato della base. È come se le varie sezioni trasversali fossero semplicemente scivolate nelle nuove posizioni senza cambiare forma. Il principio di Cavalieri ci dice che queste due scatole hanno lo stesso volume.

Il punto è che, comunque spostiamo le varie sezioni trasversali (potremmo persino ruotarle), le loro aree non cambiano, e i due solidi avranno lo stesso volume. Ovviamente, i quadrati non hanno niente di speciale; quest'idea funziona per qualunque forma.

Cosa succede ad una piramide non retta? O ad un cono inclinato? Potremmo anche immaginare una sorta di **cono generalizzato**, con una forma qualunque come base ed un punto come vertice ad una certa altezza sopra di essa.

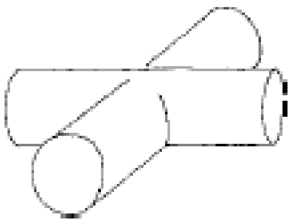


Se costruiamo ancora una piramide, con la stessa area di base e la stessa altezza del cono generalizzato, lo stesso argomento di scala di prima ci dice che le sezioni trasversali corrispondenti sono uguali. Ciò significa che il volume di qualunque cono generalizzato è semplicemente un terzo del corrispondente cilindro generalizzato.



Le diagonali di un cubo formano un tetraedro regolare.
Quanta parte del cubo occupa?

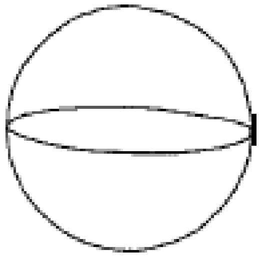
Quali sono i volumi dei solidi platonici?
E degli altri poliedri simmetrici?



Supponi che due cilindri identici si incontrino ad angolo retto.
Come sarà la loro intersezione e che volume avrà?
E tre cilindri mutuamente perpendicolari?

14

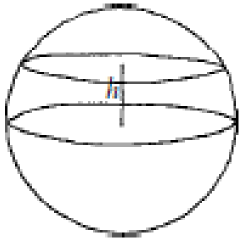
L'uso più spettacolare del principio di Cavalieri è stato fatto quasi duemila anni prima che Cavalieri nascesse. Si tratta della misura di Archimede del volume di una sfera.



A mio parere, questo è l'oggetto più semplice ed elegante che si possa immaginare. È completamente simmetrico – ogni punto sulla superficie è alla stessa distanza dal centro. Chiameremo questa distanza *raggio* della sfera, proprio come abbiamo fatto per i cerchi.

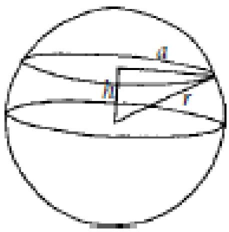
Ora, l'idea è di costruire un oggetto diverso che abbia le stesse sezioni trasversali della sfera. Allora il principio di Cavalieri ci dirà che i loro volumi sono gli stessi. Ovviamente, ciò avrà senso a patto che la nuova forma sia in qualche modo più facile da misurare.

Supponi che la nostra sfera abbia raggio r. Vediamo se riusciamo a trovare le aree delle varie sezioni trasversali. Immaginiamo di tagliare una fetta orizzontale ad una certa altezza h sull'equatore.



La sezione trasversale sarà un cerchio. Supponiamo che abbia raggio a. Ovviamente, la grandezza di a dipende dall'altezza della fetta. Se la fetta attraversa il centro della palla (in modo che l'altezza sia zero) la sezione trasversale è tutto l'equatore e il raggio a è uguale al raggio r della sfera. Salendo, h aumenta, le sezioni trasversali diventano più piccole e a diminuisce. Infine, al Polo Nord, a diventa zero e la sezione trasversale è un punto singolo.

Ci occorre sapere in che modo preciso queste sezioni trasversali dipendono dall'altezza. Fortunatamente non è molto difficile.



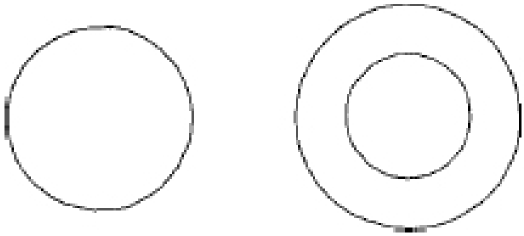
Ogni punto sulla circonferenza della sezione trasversale sarà ad una distanza r dal centro della sfera, per cui abbiamo un triangolo rettangolo con lati corti h e a e lato lungo r. Il teorema di Pitagora ci dice che

$$a^2 + h^2 = r^2.$$

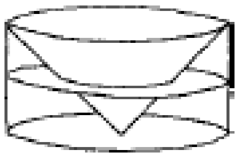
Ciò significa che l'area della sezione trasversale è

$$\pi a^2 = \pi(r^2 - h^2) = \pi r^2 - \pi h^2.$$

Esiste una bella interpretazione geometrica di questa relazione: l'area della sezione trasversale è uguale alla differenza tra l'area di un cerchio di raggio *r* e quella di un cerchio di raggio *h*. In altre parole, all'area di un *anello*.

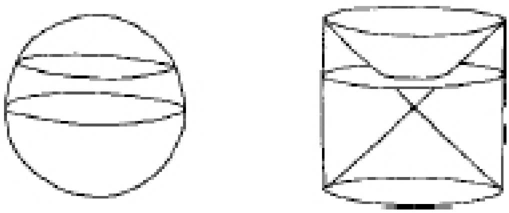


Aumentando l'altezza *h*, questa “fetta di ananas” si fa più sottile. Il raggio esterno resta lo stesso mentre quello interno aumenta. Archimede si accorse che questi anelli sono esattamente le sezioni trasversali di un cilindro *privato di un cono*.



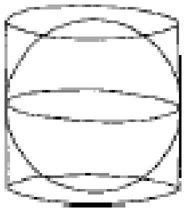
Il cilindro ha raggio *r* e altezza *r*, e così il cono. Ciò fa si che ogni fetta del cono abbia lo stesso raggio della sua altezza, esattamente come il raggio interno della buccia d'ananas. Poiché il cerchio esterno ha sempre raggio *r*, possiamo concludere che Archimede aveva ragione.

Adesso possiamo costruire un solido con aree delle sezioni trasversali uguali alla sfera. Basta incollare due copie del cilindro privato del cono, una per la metà superiore della sfera e una per quella inferiore. In altre parole, abbiamo un cilindro da cui è stato rimosso un *doppio cono*.



Poiché questi due oggetti hanno le stesse sezioni trasversali ad ogni livello, il principio di Cavalieri ci dice che devono avere lo stesso volume. È o non è fantastico?

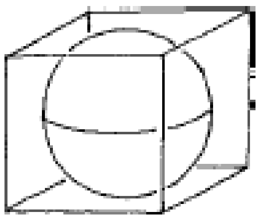
Il bello è che sappiamo trattare coni e cilindri. I due coni insieme devono occupare un terzo del cilindro poiché ognuno occupa un terzo della sua metà di cilindro. Quindi il volume del solido di Archimede è due terzi del volume del cilindro. Osserva che questo cilindro ha lo stesso raggio e altezza della sfera. Quindi possiamo concludere, come fece Archimede molto tempo fa, che una sfera occupa esattamente i due terzi del cilindro in cui è collocata.



Questa è misurazione al massimo livello. Ovviamente, se preferisci, possiamo esprimere il volume di una sfera in funzione unicamente del raggio. Il volume del cilindro sarebbe

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

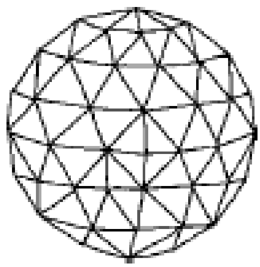
e quindi il volume della sfera di raggio r è $\frac{4}{3}\pi r^3$.



Quanta parte del cubo occupa la sfera? È più di metà?

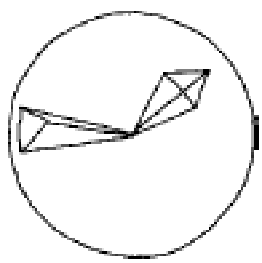
Mostra che un cono in una semisfera occupa esattamente metà del volume.

Giacché parliamo di sfera, misuriamone l'area della superficie. Voglio imitare la nostra trattazione del cerchio, in cui abbiamo usato poligoni per approssimare sia l'area che la circonferenza. Ora l'idea è di approssimare la sfera usando poliedri con molte facce.



Non importa particolarmente come lo facciamo, purché le facce diventino via via più piccole andando avanti. Ciò assicurerà che il volume e l'area della superficie dei poliedri approssimano quelli della sfera. Per semplicità, assumiamo che tutte le facce siano triangoli.

Per misurare il volume di questo poliedro, lo faremo a pezzi. Se colleghiamo il centro della sfera ai vertici di ogni faccia, formiamo un mucchio di piccole piramidi regolari.



Il volume del poliedro è la somma dei volumi di tutti questi piccoli tetraedri. Ciò è analogo alla divisione in approssimazioni poligonali del cerchio in tanti piccoli triangoli.

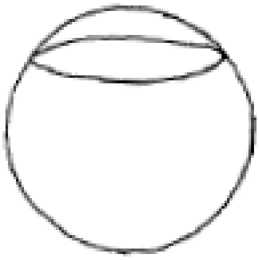
Adesso, ecco l'idea. L'altezza di tutte queste piccole piramidi è molto vicina al raggio r della sfera. Quindi il volume di ciascuna piramide è circa un terzo del raggio per l'area di base. Mettendole insieme otteniamo che il volume totale del poliedro è circa un terzo del raggio per l'area superficiale. Questa è solo un'approssimazione, perché ciascuna altezza non era proprio uguale al raggio, ma diventa sempre più vicina alla verità.

Ciò significa che, nella sfera, il volume V e l'area superficiale S soddisfano esattamente la relazione $V = \frac{1}{3} r S$. Volendo, possiamo combinare quest'informazione con $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, per ottenere:

$$S = 4\pi r^2 .$$

Che bella misurazione. Ci dice che l'area della superficie di una sfera è esattamente quattro volte l'area della misura di un cerchio equatoriale.

Mostra che l'area della superficie di una sfera è esattamente due terzi di quella del cilindro che la contiene.



Quali sono il volume e l'area superficiale di una calotta sferica?

15

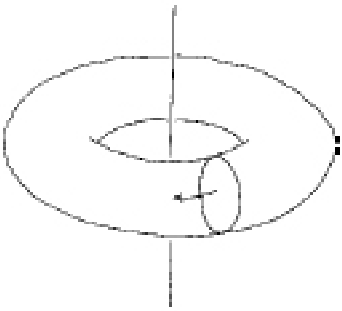
Adesso voglio parlarti di una scoperta davvero bella fatta all'inizio del quarto secolo, sul finire del periodo classico della geometria. L'idea appare inizialmente in una collezione di scritti matematici del geometra greco Pappo di Alessandria (circa 320 d.C.).

Devo ammettere sin da subito che ho un po' di apprensione nell'introdurre quest'argomento. Certi suoi aspetti sono piuttosto delicati, e non mi è del tutto chiaro come spiegarli. (Potrebbero esserci punti in cui dovrò semplicemente alzare le mani).

Partiamo da una ciambella – intendo la forma, non il dolce.

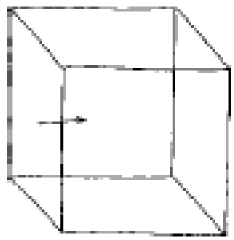
Finora, non abbiamo mai avuto bisogno di essere molto precisi nel descrivere le nostre forme. Consistono di punti, nel piano o nello spazio, disposti in qualche maniera semplice e piacevole. Abbiamo abbastanza familiarità con l'idea di una sfera, un cono o un rettangolo. Ma cos'è esattamente una ciambella?

Il modo in cui a me piace pensarla è immaginare che un cerchio venga ruotato attorno ad una linea nello spazio.



Questa specie astratta di ciambella è chiamata **toro** (dal Latino *tòrus*, cuscino). Un toro è un oggetto tracciato da un cerchio che si muove nello spazio con una traiettoria circolare.

Penso che sia un’idea molto importante, questa di descrivere una forma attraverso il movimento di un'altra. Non solo ci fornisce nuove ed esotiche forme come il toro, ma ci consente anche di guardare ad alcuni oggetti familiari in un nuovo modo. Per esempio, un cubo può essere pensato come la traccia di un quadrato che si muove su una linea retta.



Qualche volta mi piace immaginare che il quadrato sia un animale preistorico che striscia su questa pista da milioni di anni. Il cubo è la "registrazione fossile" di questa battaglia. Un'altra immagine che ho è quella di un bastoncino che si muove trasversalmente nella neve tracciando un rettangolo.

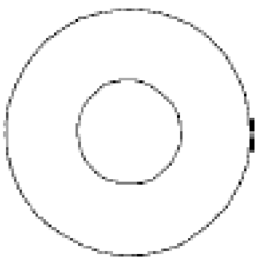
In ogni caso, il punto è che molte belle forme possono essere viste come il risultato di movimenti di un qualche tipo.

Riesci a trovare due modi distinti di guardare il cilindro come il risultato di un movimento?

Ci domandiamo se questo modo di pensare a una forma possa esserci di qualche aiuto nell'ambito della misurazione. È un tema ricorrente in geometria, la relazione tra *descrizione* e *misura*. Come dipende la misura di un oggetto dal modo in cui è descritto?

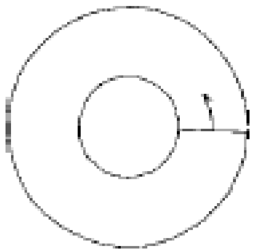
In particolare, se un oggetto è ottenuto dal movimento di una forma più semplice, com'è collegata esattamente la sua misura a quella figura e al modo in cui si muove? Questa è la domanda che Pappo si fece sedici secoli fa, ed è la sua grande scoperta quello che voglio provare a spiegarti.

Mi piacerebbe partire con le fette di ananas che abbiamo incontrato prima nella misurazione della sfera.



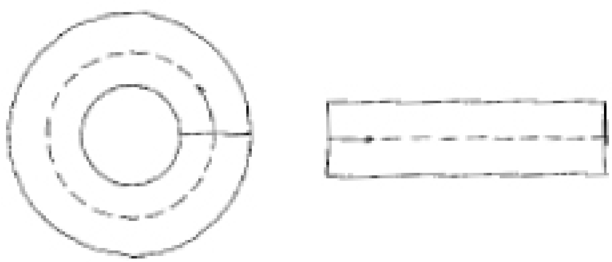
Ciò di cui stiamo parlando è lo spazio tra due cerchi concentrici. Questo tipo di regione è chiamata **anello** (dal latino *anèllus*). Ovviamente possiamo guardarla come una grande regione circolare da cui ne è stata rimossa una più piccola.

D'altra parte, una forma di anello può essere vista anche come risultato di un bastoncino che si muove su una traiettoria circolare, come uno spazzaneve che gira intorno a un albero.



Ovviamente, se il bastoncino (o lo spazzaneve) avessero percorso un cammino dritto, avrebbero prodotto un rettangolo. Possiamo dunque collegare l'anello e il rettangolo ad una stessa idea – forme create da un bastoncino mobile. Ciò è interessante perché l'anello è una forma geometricamente molto diversa da un rettangolo. Se provi a stirare un rettangolo per farne un anello, per esempio, non ci riuscirai molto bene; il margine interno si deformerà e quello esterno si strapperà. Non proprio una bella figura. Il problema interessante su anelli e rettangoli è come confrontare le loro aree. Supponiamo di prendere un bastoncino e muoverlo lungo una traiettoria circolare per formare un anello.

Quanto deve misurare una traiettoria rettilinea per spazzare la stessa area? Era proprio questo il tipo di cose che interessavano Pappo.



Penso sia ragionevole aspettarsi che la lunghezza giusta si trovi da qualche parte tra la circonferenza interna e quella esterna dell'anello. Un'ipotesi naturale è quella della circonferenza media. Supponiamo di fare in modo che il rettangolo sia lungo esattamente quanto il cerchio "medio". Le aree saranno necessariamente uguali?

Ebbene, lo sono. In effetti c'è un modo molto bello di vederlo, collegato alla relazione babilonese della differenza di quadrati, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.

Ecco l'idea. Il nostro anello è completamente determinato dal raggio dei cerchi interno ed esterno. Chiamiamo R il raggio esterno e r quello interno. Pensando all'anello come alla differenza di due cerchi, abbiamo che la sua area è semplicemente $\pi R^2-\pi r^2$.

Per il rettangolo, vogliamo conoscere la lunghezza del bastoncino e quella della traiettoria. Quella del bastoncino è facile; è ovviamente $R-r$. Capisci perché? Il cerchio in mezzo all'anello è proprio una media, nel senso che il suo raggio è la media di raggio interno ed esterno. In altre parole, il raggio del cerchio medio è $\frac{1}{2}(R+r)$.

Poiché la circonferenza del cerchio è sempre 2π per il raggio, la lunghezza del cammino (e quindi la lunghezza del rettangolo) deve essere

$$2\pi\frac{1}{2}(R+r)=\pi(R+r).$$

Infine, l'area del rettangolo è il prodotto di base per altezza, ossia

$$\pi(R+r)(R-r)=\pi(R^2-r^2)=$$
$$=\pi R^2-\pi r^2$$

che coincide esattamente con l'area dell'anello. Qui mi piace come si fondono algebra e geometria. La relazione della differenza di quadrati si riflette geometricamente nell'equivalenza di anello e rettangolo.

Un bel modo di pensare a ciò è osservare che il cerchio medio è semplicemente la traiettoria del punto medio del bastoncino. In altre parole, è la distanza percorsa dal *centro* ad essere importante. In particolare, abbiamo scoperto che se il centro di un bastoncino percorre una traiettoria circolare di una certa lunghezza, esso spazza un'area uguale a quella che avrebbe spazzato se la traiettoria fosse stata dritta. In ogni caso, l'area è semplicemente il prodotto della lunghezza del bastoncino per la lunghezza della traiettoria.

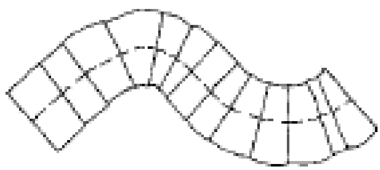
Questo è un bell'esempio di come il modo di descrivere (l'anello è descritto dal moto del bastoncino) influenzi la misurazione (l'area dipende in modo elegante da bastoncino e traiettoria). Come ho detto, il collegamento tra descrizione e misura è tutto ciò di cui si occupa la geometria.

Possiamo spingere quest'esempio ancora un po' più in là. Supponiamo di muovere il bastoncino (dal punto medio) su una traiettoria arbitraria.

Il nostro risultato resta valido? Possiamo dire che l'area della regione spazzata è la stessa che se fosse dritta? È semplicemente il prodotto della lunghezza del bastoncino per la lunghezza della traiettoria, o stiamo approfittando della nostra fortuna?

In effetti, è vero indipendentemente dalla forma della traiettoria. Vediamo se riesco a spiegare perché. Innanzitutto, osserva che funziona per traiettorie che siano segmenti circolari, o *archi*.

Questo perché la lunghezza d'arco e l'area spazzata sono nella stessa proporzione a quelle di un anello completo. In particolare, il risultato sussiste tanto per piccoli "frammenti" di anello quanto per piccolissimi rettangoli. L'idea è di disporli a formare insieme forme più complicate.



Le varie traiettorie percorse dal centro del bastoncino, unite insieme, formano un'unica grande traiettoria composta da piccoli tratti circolari e dritti. Componendoli opportunamente possiamo ottenere una traiettoria che approssimi qualunque curva desiderata.

In particolare, possiamo (con una sequenza infinita di tali approssimazioni) approssimare la traiettoria desiderata con la lunghezza totale del nostro cammino, e l'area della nostra composizione di frammenti approssimerà l'area reale della regione desiderata. Poiché l'area approssimata è il prodotto della lunghezza del bastoncino per quella della traiettoria, e ciò resta vero con il migliorare dell'approssimazione, deve essere vero anche per l'effettiva regione considerata. Ancora una volta, il metodo di esaustione ci è venuto in aiuto.

Questo è il nostro primo esempio della sorprendente generalità del risultato di Pappo: l'area della regione spazzata da un bastoncino mobile è il prodotto della lunghezza del bastoncino per la distanza percorsa dal suo centro.

Qui ci sono alcune sottigliezze da cogliere. La prima è che, affinché ciò funzioni, il bastoncino deve restare sempre perpendicolare alla direzione del moto. Spostare il bastoncino ad un certo angolo, stravolge le cose.

Per esempio, il teorema di Pappo fallisce miseramente per un parallelogrammo. Poiché abbiamo assemblato le nostre forme partendo, almeno approssimativamente, da frazioni di anelli e rettangoli, in cui bastoncino e traiettoria sono sempre perpendicolari, questo è il solo tipo di moto che il nostro metodo può comprendere. La perpendicolarità del moto è un ingrediente essenziale della filosofia di Pappo.

L'altra questione è quella dell'autointersezione.

Se la traiettoria curva troppo velocemente, ci capiterà di passare due volte su alcune parti della nostra regione, e queste aree di sovrapposizione saranno contate due volte. Tutto funziona, fintanto che restiamo perpendicolari ed evitiamo curve brusche.

Qual è il perimetro di una regione spazzata da un bastoncino mobile?

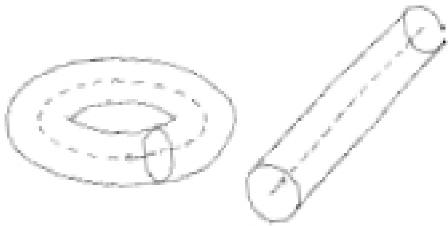
16

E ora, che dire della ciambella? Poiché un toro è descritto da un cerchio che si muove lungo una traiettoria circolare, è sensato guardare all'oggetto tracciato dallo stesso cerchio su una traiettoria dritta. In altre parole, un cilindro.

Questa volta, lo spazzaneve è una circonferenza. In verità, per essere precisi, è un intero **disco**, una circonferenza completamente riempita. (Di solito si usa la parola *circonferenza* per la curva, *cerchio* o *disco* per la regione circondata). Dunque spingeremo un disco attraverso una grossa massa di neve, creando sia un toro che un cilindro.

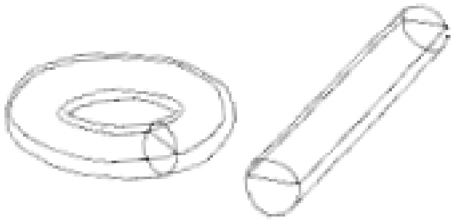
La domanda è, quanto dovrebbe essere lungo il cilindro per racchiudere lo stesso volume del toro? Osserva che mentre il disco si muove lungo il toro, i suoi punti tracciano traiettorie circolari nello spazio. Queste traiettorie hanno diverse lunghezze. Qual è quella giusta per il cilindro?

La nostra esperienza con l'anello ci suggerirebbe quella media. In altre parole la traiettoria descritta dal centro del disco.



Supponiamo di prendere la lunghezza del cilindro uguale a quella di questo cerchio medio nel toro. Quindi abbiamo lo stesso disco che percorre la stessa distanza, ma in due modi diversi, una dritta e l'altra circolare. I due volumi sono necessariamente uguali?

In effetti, lo sono. Lascia che ti mostri un bel modo di vederlo usando il principio di Cavalieri. Dobbiamo immaginare di affettare orizzontalmente entrambi gli oggetti.



Le sezioni trasversali del cilindro non sono difficili da visualizzare; sono rettangoli. Hanno tutti la stessa lunghezza, ossia quella del cilindro, mentre la profondità varia a seconda dell'altezza della fetta. In effetti, possiamo leggere la profondità di una sezione trasversale sulla base circolare del cilindro. È la lunghezza di una corda sul disco a quell'altezza.

Le sezioni trasversali del toro sono un po' più complicate; sono anelli. Al variare dell'altezza della fetta, cambiano le dimensioni sia del margine inferiore che di quello superiore. D'altra parte, i cerchi medi di questi anelli sono tutti uguali. Questo perché le fette orizzontali attraverso il disco sono centrate, per la simmetria del cerchio. Dunque tutti questi anelli hanno la stessa circonferenza centrale.

Ciò significa che il toro e il cilindro hanno sezioni trasversali facili da confrontare. Se affettiamo alla stessa altezza abbiamo un anello e un rettangolo con lunghezza e profondità uguali. Quindi con la stessa area. Poiché ciò è vero indipendentemente da dove affettiamo, il principio di Cavalieri ci dice che i volumi sono uguali.

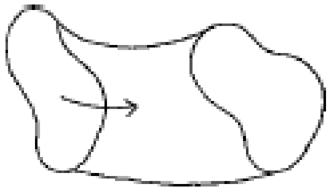
Ciò che abbiamo provato è che il volume del toro descritto da un disco che si muove su una traiettoria circolare è semplicemente il prodotto dell'area del disco per la lunghezza della traiettoria. Quindi se prendiamo un cerchio di raggio a e muoviamo il suo centro lungo un cerchio di raggio b, abbiamo un toro il cui volume è dato da

$$V = \pi a^2 \times 2\pi b\,.$$

Questo è un bell'esempio della filosofia di Pappo. La nozione di centro gioca di nuovo un ruolo importante. Osserva anche che il disco resta sempre perpendicolare alla direzione del moto.

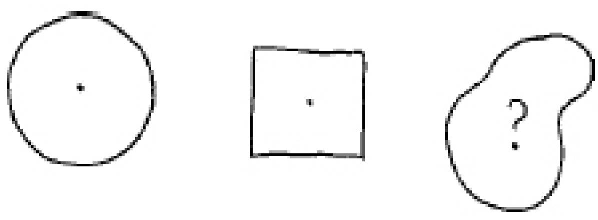
Esattamente come prima, possiamo generalizzare il risultato ad una traiettoria arbitraria nello spazio, attraverso approssimazioni di frammenti cilindrici e torici. Dunque il volume di qualunque solido formato da un disco mobile perpendicolarmente ad una traiettoria del suo centro si può ottenere moltiplicando l'area del disco per la lunghezza della traiettoria.

Il notevole passo in avanti di Pappo fu quello di generalizzare ulteriormente questo risultato, sostituendo al disco una figura piana *qualunque*.



Immagina una regione piatta di una qualche forma fissata, trascinata nello spazio in modo da restare sempre perpendicolare alla direzione del moto. Ciò produrrà un solido stravagante. Pappo scoprì che persino il volume di un mostro simile obbedisce al pattern di prima: è il prodotto dell'area della regione di partenza per la lunghezza di una certa traiettoria. Naturalmente, questa è la traiettoria di un punto medio della regione. Ma che significa questo esattamente?

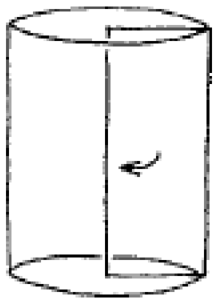
Per forme simmetriche come un cerchio o un quadrato, c'è un ovvio candidato, un centro. Ma dov'è il centro di una regione asimmetrica?



Ebbene, c'è un modo di definire il centro di un oggetto, qualunque ne sia la forma. Ha anche una bella descrizione fisica: è il posto in cui metti il dito se vuoi che l'oggetto sia in equilibrio. Questo punto è unico per ogni forma ed è chiamato **centroide** (la nozione fisica corrispondente è quella di *centro di massa*). Il problema dei geometri è dare senso a questa idea in modo puramente astratto, poiché gli oggetti geometrici sono immaginari e non hanno effettivamente né massa né capacità di restare in equilibrio. Che ciò possa essere fatto, è bello ma non molto facile da spiegare. Penso che te lo lascerò come un bel problema aperto di ricerca.

Come si può definire il centroide di una forma?
Possiamo farlo in modo che valga il teorema di Pappo?

In ogni caso, il punto è che ogni oggetto ha un centroide, e la grande scoperta di Pappo è questa: il volume di un solido descritto da una figura piana mobile è uguale al prodotto della sua area per la lunghezza della traiettoria descritta dal centroide (qualora, ben inteso, la figura resti perpendicolare alla direzione di viaggio e non ci siano autointersezioni dovute a curve brusche). Osserva che la nostra scoperta sui bastoncini si accorda a questa filosofia generale. Il centroide di un bastoncino è semplicemente il suo punto medio.



Mostra che il teorema di Pappo funziona per un cilindro generato dalla rotazione di un rettangolo.

Infine, c'è la questione della superficie laterale. Come possiamo misurare la superficie laterale di un toro? Questa volta siamo interessati alla crosta della ciambella. È la circonferenza a tracciare questa superficie, non il disco. In altre parole, è la rotazione dei punti della circonferenza a descrivere la superficie che vogliamo misurare.

Ancora una volta, è la stessa che se fossimo andati dritti. La superficie laterale di un toro è il prodotto della circonferenza del cerchio mobile per la lunghezza della traiettoria centrale. Quindi l'area del toro che stavamo cercando è

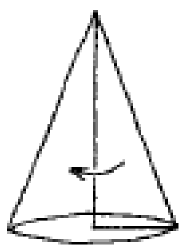
$$S = 2\pi a \times 2\pi b \ .$$

In generale, la superficie laterale di un oggetto spazzato da una figura piana in movimento è il prodotto del perimetro della figura per la lunghezza della traiettoria tracciata da un certo punto. (Assumendo che la forma non ruoti lungo la traiettoria). Ora, però, non è importante il centroide della regione, ma quello del perimetro.

Per il cerchio, e per qualche altro oggetto molto simmetrico, queste due nozioni di centro coincidono, ma in generale no. Per fartene un'idea, immagina due modelli fisici della stessa forma piatta. Uno di un metallo pieno, l'altro con il bordo di metallo e l'interno di un materiale molto più leggero. I punti d'equilibrio dei due modelli non necessariamente coincideranno. Questo sembra un altro buon progetto di ricerca:

Come possiamo definire il centroide del perimetro?

Spero che ciò non sia stato troppo frustante. Queste idee sono molto profonde e difficili da spiegare. Qui volevo dartene soltanto un assaggio perché penso siano molto belle.



La rotazione di un triangolo rettangolo genera un cono.
Se Pappo ha ragione, dov'è il centroide del triangolo?

Riesci a trovare il centroide di un semicerchio?
E il centroide del suo perimetro?

17

Le forme che abbiamo trattato fin qui – quadrati, cerchi, cilindri e così via – sono piuttosto speciali. Sono semplici, simmetriche e facili da descrivere. In altre parole, sono belle. In effetti, mi spingerò al punto di dire che sono belle perché sono facili da descrivere. Le forme più piacevoli da guardare sono quelle che richiedono meno parole di spiegazione. In geometria, come nel resto della matematica, *semplice è bello*.

Ma cosa dire delle forme irregolari più complicate? Penso che dobbiamo dare uno sguardo anche ad esse. Dopotutto, molte forme non sono così semplici e belle. Ci perderemmo qualcosa del grande disegno se restringessimo la nostra attenzione solo agli oggetti più eleganti.

Prendiamo i poligoni, ad esempio. Fin'ora abbiamo trattato soltanto i poligoni regolari (quelli con lati ed angoli uguali). Ovviamente questi sono i più belli. Ma ci sono tanti altri poligoni là fuori. Eccone uno non così regolare.

Ovviamente, poligoni come questo sono più complicati, e avremo un prezzo da pagare. Il prezzo è un maggior tecnicismo – oggetti difficili richiedono spiegazioni difficili. Ciononostante, ci occorre un modo per indicare esattamente di che poligono stiamo parlando. Non riusciremo a misurare né a comunicare idee su una forma descritta solo come “quella cosa che sembra un cappello”.

Il modo più naturale di descrivere un poligono particolare è di elencare semplicemente tutti i suoi angoli e le lunghezze dei suoi lati (ovviamente, in ordine). Quest'informazione è come un programma; determina esattamente di che poligono si tratta.

Se preferisci, possiamo anche pensare a un poligono come a una sequenza di distanze e curve, come se stessimo viaggiando lungo il suo perimetro.

Questi giri esterni dunque completeranno un giro completo. Certamente, dobbiamo stare attenti a contare i giri verso destra come opposti a quelli verso sinistra. Se ad esempio viaggiassimo in senso antiorario, si potrebbero contare i giri verso sinistra come positivi e quelli verso destra come negativi. Quindi il totale sarebbe un unico giro completo (antiorario).

Qual è la somma degli angoli interni di un poligono?

Qualunque sia il modo in cui scegliamo di descrivere un poligono irregolare, dovremmo comunque misurarlo. Come possiamo, ad esempio, determinare l'area di un tale poligono a partire da un elenco degli angoli e delle lunghezze dei lati?

Quel che è peggio, una forma così descritta potrebbe addirittura non essere un poligono. Per esempio, potrebbe autointersecarsi nel mezzo oppure non chiudersi alla fine.

Cosa fare con queste forme? Continuiamo a chiamarli poligoni? Cosa vogliamo significhi la parola *poligono*? Certamente, questa è solo una questione terminologica; il punto non è cos'è vero ma cosa conviene.

Supponiamo di estendere il significato della parola *poligono* in modo da includere queste nuove forme. Ciò ha perlomeno il vantaggio di determinare un poligono per qualunque sequenza di lunghezze e angoli. Chiamiamo un poligono **chiuso** se si chiude alla fine e **semplice** se è privo di sovrapposizioni. Quelli che prima chiamavamo poligoni, quindi adesso li chiameremo *poligoni semplici e chiusi*.

In ogni caso, abbiamo un problema interessante: dato un poligono, come sequenza di lunghezze ed angoli, come facciamo a dire se è semplice o chiuso?

Il punto è che angoli e lunghezze non sono indipendenti gli uni dalle altre – c'è un nesso sottile tra loro. Se vogliamo, ad esempio che un poligono sia chiuso, dobbiamo porre delle restrizioni su lunghezze ed angoli da usare.

Se un poligono semplice e chiuso di quattro lati ha tutti gli angoli retti, che condizione devono soddisfare le lunghezze dei lati?

In generale, la strategia migliore per trattare i poligoni è dividerli in più pezzi. È ciò che si chiama una **dissezione** del poligono. In particolare, possiamo sempre sezionare un poligono in triangoli.

Ciò ha l'effetto di ridurre un qualunque problema sui poligoni ad una (probabilmente grande) collezione di problemi sui triangoli. Per esempio, l'area di un poligono semplice e chiuso sarà la somma delle aree dei pezzi triangolari. Per comprendere i poligoni, basta comprendere quelli più semplici: i triangoli. Meno male! Avrei comunque preferito i triangoli; i triangoli sono più semplici, e più semplice è meglio.

Scrivi una piccola lista di lunghezze e angoli. Quali problemi sui triangoli devi risolvere per stabilire se il tuo poligono è chiuso?

Conoscere i punti medi dei lati di un triangolo è un'informazione sufficiente a ricostruire il triangolo? E un quadrilatero?

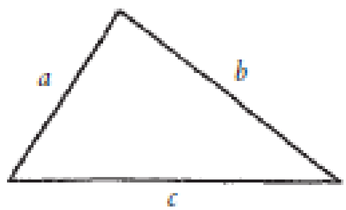
18

Lo studio dei triangoli si chiama **trigonometria** (dal greco *trigòno-metria,* misura dei triangoli). Il problema è scoprire come le varie misure di un triangolo – angoli, lunghezze dei lati e area – sono collegate le une alle altre. Come, ad esempio, l'area di un triangolo dipende dai suoi lati? Qual è la relazione tra i lati e gli angoli?

La prima cosa da osservare sui triangoli è che sono completamente determinati dai loro lati. Se mi dai le tre lunghezze dei lati, saprò esattamente di che triangolo stai parlando. A differenza degli altri poligoni, i triangoli non possono dimenarsi.

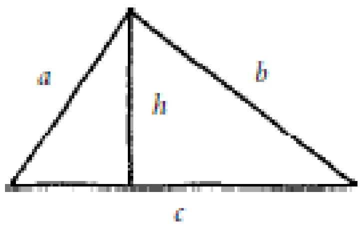
Tre lunghezze formano sempre un triangolo?

Supponiamo di avere un triangolo con lati di lunghezze a, b e c (ovviamente misurate rispetto ad una opportuna unità di misura scelta).



Qual è l'area di questo triangolo? Qualunque essa sia, deve dipendere soltanto da a, b e c, poiché a, b e c determinano univocamente il triangolo e quindi la sua area. Il perimetro, ad esempio, è semplicemente la somma dei tre lati, $a+b+c$. L'area ha una simile descrizione algebrica? Se si, qual è? Ciò che più conta, come possiamo scoprire qual è?

Un modo naturale per iniziare è di tracciare una linea dalla punta del triangolo alla base.



La chiameremo altezza h. Quindi l'area A del triangolo può essere espressa come

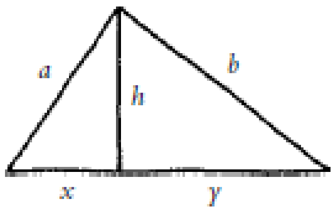
$$A=\frac{1}{2}c\,h\ .$$

Il problema adesso diventa quello di esprimere l'altezza h in funzione dei lati a, b e c.

Prima di partire, voglio dire qualcosa su ciò che dovremmo aspettarci. Il nostro problema è quello di misurare l'area di un triangolo dati i lati. La domanda è perfettamente simmetrica, nel senso che tratta allo stesso modo i tre lati: non ci sono lati "speciali". In particolare, la domanda non coinvolge alcuna base. Il significato algebrico di questo fatto è che, qualunque sia l'espressione che troveremo per l'area, essa dovrà coinvolgere i simboli a, b e c, in maniera simmetrica. Scambiando, ad esempio, le a con le b, la formula deve restare inalterata.

Un'altra cosa da osservare è che, per il modo in cui l'area cambia con il passaggio di scala, la nostra formula dovrà essere *omogenea di secondo grado*, intendendo con ciò che la sostituzione dei simboli a, b e c con le versioni in scala ra, rb e rc deve avere l'effetto di moltiplicare l'intera espressione per r^2 . Quindi ci aspettiamo come area, una combinazione algebrica dei simboli a, b e c che sia simmetrica ed omogenea. Ad esempio, potrebbe essere qualcosa del tipo $A=a^2+b^2+c^2$. Sfortunatamente non sarà una cosa così facile. Vediamo cosa succede!

Osserva come l'altezza divide la base c in due pezzi. Chiamiamo questi pezzi x e y. Il nostro triangolo originale è stato diviso in due triangoli rettangoli.



Adesso possiamo usare il teorema di Pitagora per avere informazioni su x, y e h. Fortunatamente, otterremo informazioni sufficienti a determinarli effettivamente. Avremo:

$$\begin{aligned} x+y&=c\ , \\ x^2+h^2&=a^2\ , \\ y^2+h^2&=b^2\ . \end{aligned}$$

Sembra un po' un'insalata di lettere. Con tante lettere e simboli vaganti, è importante avere chiaro in mente il significato e la condizione di ognuno. Qui *a*, *b* e *c* si riferiscono ai lati del triangolo originale. Sono numeri che abbiamo supposto noti dall'inizio. I simboli *x*, *y* e *h*, d'altra parte, sono incogniti. I loro valori sono al momento un mistero. Dobbiamo scoprire il mistero risolvendo in qualche modo le precedenti equazioni fino ad aver *x*, *y* e *h* espressi esplicitamente in funzione di *a*, *b* e *c*.

Generalmente, questo tipo di problema può essere quasi sempre risolto, qualora ci sia un numero sufficiente di equazioni. Una buona regola empirica è che servono almeno tante equazioni quante sono le incognite (sebbene ciò non sia sufficiente). Nel nostro caso, poiché ne abbiamo tre, dovrebbe essere possibile risolvere le nostre equazioni. Ovviamente, nessuna regola empirica può dirci come risolverle; è qui che entra in gioco l'abilità algebrica vera e propria.

La prima cosa da fare è scoprire quanto valgono *x* e *y*. Prova a risistemare le nostre equazioni fino ad avere

$$x=\frac{c}{2}+\frac{a^2-b^2}{2c} \quad ,$$

$$y=\frac{c}{2}-\frac{a^2-b^2}{2c} \quad .$$

Ciò spiega come viene divisa la base del triangolo – il punto in cui l'altezza incontra la base dista esattamente $\frac{a^2-b^2}{2c}$ unità dal punto medio. Questa distanza va misurata a sinistra o a destra, a secondo di quale tra *a* e *b* sia maggiore.

Il passo successivo è trovare l'altezza *h*. Per il modo in cui *h* compare nelle nostre equazioni, è un po' più facile cercare piuttosto h^2. In effetti, per rendere il tutto più bello, riscriviamo *x* come $\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}$ ed usiamo l'equazione $x^2+h^2=a^2$ per cui

$$h^2=a^2-x^2=a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2 \quad .$$

Osserva l'asimmetria di quest'espressione. Essa è dovuta in parte al fatto che abbiamo scelto *c* come base e *h* come l'altezza relativa a questa base, per cui *c* è stato trattato diversamente da *a* e *b* (abbiamo anche usato la relazione tra x ed h, e non quella che coinvolge y).

Ora possiamo ottenere l'area A. Ancora una volta, è un po' meglio avere a che fare con A^2 piuttosto che con A. Poiché l'area è data da $A=\frac{1}{2}c\,h$, possiamo scrivere

$$A^2=\frac{1}{4}c^2h^2=$$

$$=\frac{1}{4}c^2a^2-\frac{1}{4}c^2\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}\right)^2 .$$

Non è un granché. Sebbene siamo riusciti a misurare l'area del triangolo, la forma algebrica di questa misura è esteticamente inaccettabile. Innanzitutto non è simmetrica; secondo è orrenda. Mi rifiuto semplicemente di credere che una cosa così naturale come l'area di un triangolo debba dipendere dai suoi lati in un modo così assurdo. Deve essere possibile riscrivere questa ridicola espressione in una forma più attraente.

Per prima cosa, osserviamo che il tutto può essere riscritto come differenza di quadrati. Precisamente

$$A^2=\left(\frac{ac}{2}\right)^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{4}\right)^2 .$$

Per semplificare, moltiplichiamo ambo i membri per 16, per eliminare tutti questi antipatici denominatori. Otteniamo

$$16\mathrm{A}^2=(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2 .$$

Questo è un bel passo in avanti. Adesso, usando la relazione della differenza di quadrati, possiamo (con un po' di abilità) riscrivere il tutto come

$$16\mathrm{A}^2=(2ac+(c^2+a^2-b^2))(2ac-(c^2+a^2-b^2))=$$

$$=((a^2+2ac+c^2)-b^2)(b^2-(a^2-2ac+c^2))=$$

$$=((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2) .$$

Abbiamo di nuovo una differenza di quadrati. Ciò significa che possiamo ulteriormente spezzarla per avere

$$16\mathrm{A}^2=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c) .$$

Adesso, va meglio! La simmetria è finalmente rivelata e ora il pattern è piuttosto bello.

Ovviamente, matematicamente non è cambiato nulla. Tutte queste equazioni dicono esattamente la stessa cosa su come l'area dipende dai lati – tutte queste abili manipolazioni algebriche non hanno cambiato questa relazione. Ciò che è cambiato è la sua relazione con *noi*. Siamo noi che volevamo ridisporre l'informazione in una forma esteticamente più significativa. I triangoli non se ne importano. Fanno quel che fanno senza riguardo per come scegliamo di descriverli. L'algebra è più collegata con la psicologia; non riguarda la verità, ma il modo in cui noi ci relazioniamo ad essa. D'altra parte non si occupa semplicemente di verità; ma di verità belle. Non basta avere una formula per l'area del triangolo; ne vogliamo una bella. Ed ora l'abbiamo.

Infine, per ottenere l'area A, basta dividere per 16 ed estrarre la radice quadrata. Osserva che, essendoci 4 termini nel prodotto, dividere per 16 significa dividere a metà ciascun termine. La nostra formula per l'area di un triangolo diventa

$$A = \sqrt{\frac{a+c+b}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+a-c}{2} \cdot \frac{b-a+c}{2}}.$$

Devo ammettere che appaia un po' complicata. Ma prima di giungere a conclusioni, tuttavia, ricordiamoci che questa formula ci da l'area di un triangolo qualunque, di non importa quale forma o dimensione. Non è una cosa da poco. Dovremmo essere contenti di una relazione algebrica qualunque, figuriamoci di una che coinvolge i lati in modo così semplice. Questa formula è effettivamente piuttosto elegante considerando quel che doveva fare.

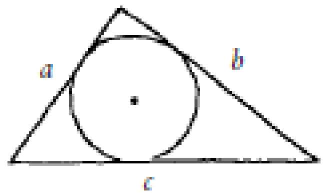
E, in effetti, possiamo renderla ancora più bella introducendo una notazione opportuna. Sia $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. In altre parole, s sia la metà del perimetro del triangolo (anche noto come **semiperimetro**). L'area può essere scritta molto semplicemente come

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Questa bella formula appare negli scritti del matematico greco Erone di Alessandria (60 d.C. circa) e, per questa ragione, viene solitamente chiamata **formula di Erone** (in effetti è molto più vecchia di Erone, ed era probabilmente già nota ad Archimede). Ovviamente, nessun geometra classico avrebbe affrontato il problema così come abbiamo fatto noi; essendo lo stile del tempo molto meno algebrico. Ho voluto farlo in questo modo perché è relativamente semplice e fornisce un'altra bella illustrazione dell'interazione tra geometria e algebra.

In ogni caso, sappiamo che abbiamo un modo per misurare l'area di un qualsiasi triangolo. Prendiamo semplicemente le lunghezze dei tre lati, le mettiamo nella formula di Erone e viene fuori l'area. Per esempio, l'area di un triangolo con lati 3,5 e 6 sarà $\sqrt{56}$.

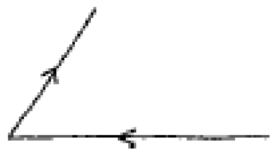
Riesci a trovare due triangoli distinti
con la stessa area e lo stesso perimetro?



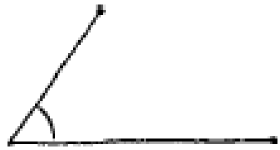
Qual è il raggio del cerchio inscritto in un triangolo di lati *a*, *b* e *c*?

19

I problemi fondamentali della geometria riguardano la relazione tra lunghezza e angolo. Ad esempio, supponiamo di percorrere una certa distanza, girare di un certo angolo, e poi percorrere un'altra distanza. Quanto ci siamo allontanati dalla partenza?



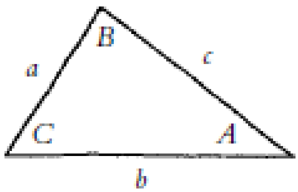
Un altro modo di pensare a questa questione è immaginare due stecchetti tenuti insieme da un'estremità.



Se muoviamo uno stecchetto, aumentando l'angolo, l'estremità dello stecchetto si allontana; riavvicinando gli stecchetti, le estremità si avvicinano. Qual è la relazione esatta tra l'angolo formato dagli stecchetti e la distanza tra i loro estremi? Questa forse è la domanda più basilare della geometria.

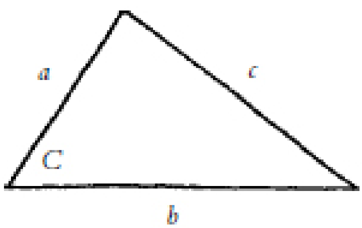
Possiamo, ovviamente, vedere questo come un problema di triangoli. Essenzialmente, ci stiamo chiedendo come il lato di un triangolo dipende dall'angolo opposto.

Forse è il momento di introdurre una notazione opportuna per i triangoli. L'idea è di usare lettere minuscole a, b e c per i lati, e lettere maiuscole A, B e C per gli angoli opposti corrispondenti.



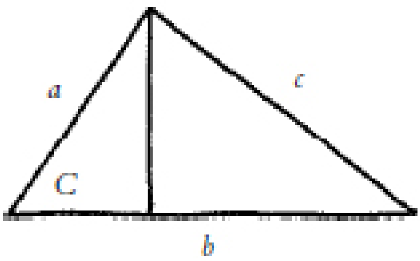
Ciò rende facile ricordare quale angolo è opposto a quale lato. (Ovviamente, le nostre idee non dipendono dalla notazione, ma spesso ne dipende la facilità nel comunicarle).

Quindi il problema è: dati due lati a e b di un triangolo, qual è la relazione tra il lato c e l'angolo C?



Se C è un angolo retto, sappiamo dal teorema di Pitagora che $c^2 = a^2 + b^2$. Ma se C non è retto? Cosa accade?

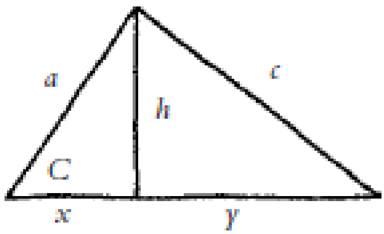
Supponiamo dapprima che C sia minore di un angolo retto. La maniera abituale per ottenere la lunghezza di c consiste nel tracciare una perpendicolare in modo che c diventi il lato lungo (o **ipotenusa**) di un triangolo rettangolo.



In effetti, l'unico metodo che possediamo per misurare le lunghezze è di coinvolgerle in qualche modo in triangoli rettangoli. Ecco perché il teorema di Pitagora è così importante.

In effetti c'è un'altra tecnica per misurare le lunghezze, che abbiamo usato per misurare la diagonale di un pentagono. Qual è?

Come prima, chiamiamo quest'altezza h, e i due pezzi della base x e y.



Pitagora ci dice quindi che

$$c^2 = y^2 + h^2$$

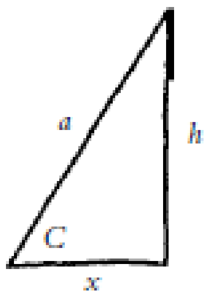
Ovviamente, ciò che vogliamo è una relazione che ci dica come c dipende da a, b e dall'angolo C. Poiché $x^2 + h^2 = a^2$ e $x + y = b$ possiamo sostituire h^2 con $a^2 - x^2$ e y con $b - x$, ottenendo

$$\begin{aligned} c^2 &= (b-x)^2 + a^2 - x^2 = \\ &= a^2 + b^2 - 2bx\,. \end{aligned}$$

Osserva la somiglianza tra quest'equazione e la relazione pitagorica: $2bx$ deve essere una sorta di termine di correzione che misura quanto *C* sia lontano dall'essere un angolo retto. Considereremo questa formula come una generalizzazione del teorema di Pitagora, valida per tutti gli angoli, non solo quelli retti.

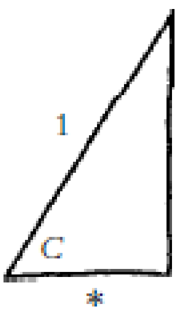
Ovviamente, la forma presente di quest'espressione è piuttosto insoddisfacente, per le due ragioni evidenti che non è simmetrica rispetto ad *a* e *b* (come dovrebbe) e che l'angolo *C* non vi compare affatto. Essenzialmente, il problema si riconduce a quello di determinare questa lunghezza *x*.

Guardiamo più da vicino il triangolo contenente *x*, *a* e l'angolo *C*.



Osserva che questo triangolo è univocamente determinato dall'angolo *C* e dall'ipotenusa *a*. In effetti, il solo *C* è sufficiente a determinare la forma di questo triangolo. Questo perché gli angoli di un triangolo assommano sempre a mezzo giro completo; se conosciamo un angolo di un triangolo rettangolo, automaticamente conosciamo l'altro.

In particolare, ciò significa che il nostro triangolo è semplicemente una versione in scala (di fattore *a*) del triangolo rettangolo con angolo *C* e ipotenusa 1.



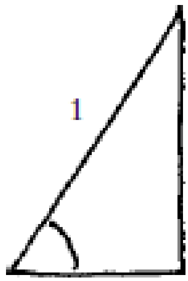
Quindi per trovare x, dobbiamo semplicemente moltiplicare la lunghezza del lato segnato con $*$ per il fattore di scala a. Quindi $x = a *$ e la nostra formula per il terzo lato di un triangolo diventa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,*$$

Il punto è che la lunghezza $*$ dipende solo dall'angolo C e non dai lati a e b. La nostra equazione adesso è simmetrica e rivela esattamente la dipendenza di c dagli altri due lati. L'unica cosa che resta è capire esattamente come $*$ dipende da C. Osserva che questa domanda coinvolge solo il triangolo rettangolo e non il triangolo originale da cui siamo partiti.

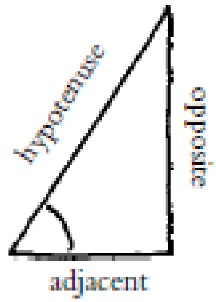
È accaduto qualcosa di interessante. Il nostro problema generale sui triangoli è stato ridotto a un problema particolare sui triangoli rettangoli. Ciò è parte di uno schema generale: i poligoni sono ridotti ai triangoli, i triangoli ai triangoli rettangoli. Una completa comprensione dei triangoli rettangoli ci direbbe tutto quel che c'è da dire sui poligoni.

Il nostro problema fondamentale è questo. Abbiamo un certo triangolo rettangolo con un certo angolo ed un ipotenusa di lunghezza 1. Quanto sono lunghi i suoi lati?



In genere, i lati di un triangolo rettangolo vengono chiamati *cateti*. Nel nostro caso i due cateti dipendono solo dal lato. Quello verticale, opposto all'angolo, viene solitamente chiamato **seno** dell'angolo (se il triangolo fosse il tuo naso coinciderebbe con le narici). Il cateto adiacente all'angolo è detto **coseno** dell'angolo. Immagino che dovrei dire che seno e coseno siano le *lunghezze* dei cateti, e non i cateti stessi. Ma abbiamo tralasciato questa distinzione fino adesso, quindi, perché dovremmo iniziare a preoccuparcene ora!

Possiamo pensare a seno e coseno come a delle *proporzioni*.



Il seno di un angolo sarà il rapporto tra il suo lato opposto e l'ipotenusa; il coseno quello tra il lato adiacente e l'ipotenusa. Questo è vero indipendentemente dal fatto che l'ipotenusa abbia o no lunghezza unitaria; l'angolo determina la forma del triangolo rettangolo, e questi rapporti sono indipendenti dal passaggio di scala.

Come sono collegati seno e coseno dei due angoli di un triangolo rettangolo?

In ogni caso, la conclusione è che ad ogni angolo corrisponde una coppia di numeri, seno e coseno, dipendenti solo dall'angolo. Se l'angolo è *C*, si usa scrivere $\sin(C)$ e $\cos(C)$ per i suoi seno e coseno. Con questa terminologia, la nostra formula diventa:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) \; .$$

Questo è il nostro teorema di Pitagora generalizzato, che collega il terzo lato di un triangolo agli altri due lati e all'angolo tra essi compreso. Ovviamente, tutto ciò che otteniamo è di trasferire il problema al caso dei triangoli rettangoli. Dobbiamo ancora trovare il coseno dell'angolo. Inoltre, la nostra ipotesi era che *C* fosse minore di un angolo retto. Cosa accade se non è così?

Ovviamente possiamo tracciare la stessa perpendicolare, solo che questa volta cade fuori dal triangolo e forma un nuovo angolo *C'*, adiacente al nostro angolo originale *C*.

Mostra che in questo caso abbiamo $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos(C')$.

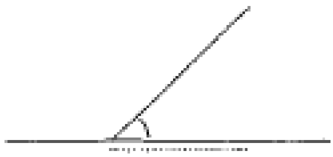
Quindi la relazione pitagorica per angoli grandi è altrettanto bella della precedente, solo che anziché sottrarre il termine $2\,a\,b\cos(C)$ stiamo aggiungendo $2\,a\,b\cos(C')$.

Apparentemente abbiamo tre casi separati (e tre formule separate), a seconda che l'angolo *C* sia minore, uguale o maggiore di un angolo retto. Questo tipo di cosa è sempre un po' irritante; dopotutto due stecchetti possono tranquillamente aprire e chiudere l'angolo tra essi lasciando variare la distanza tra i loro vertici in maniera continua. Non dovrebbe esserci un unico pattern semplice e bello?

Un modo per progredire è semplicemente quello di essere attenti nel dare le nostre definizioni. Poiché (al momento) $\cos(C)$ ha significato solo quando *C* è minore di un angolo retto, quando *C* è maggiore siamo liberi di dargli il significato che preferiamo. L'idea è di fare in modo tale che la nostra relazione pitagorica $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(C)$ rimanga valida in tutti e tre i casi. In poche parole, lasciamo che la struttura determini la nostra scelta dei significati. Questo è un tema importante in tutta la matematica; si potrebbe persino dire che è l'essenza di quest'arte – ascoltare i pattern e accordarvi le nostre definizioni e intuizioni.

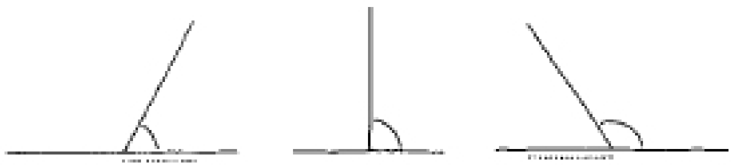
Ciò ci induce a definire zero il coseno di un angolo retto (in modo da ritrovare il vecchio teorema di Pitagora) e, in modo un po' più originale, a definire il coseno di un angolo *C* maggiore del retto come l'opposto del coseno dell'angolo adiacente *C'*. Quello che abbiamo fatto è estendere il significato di coseno. Originariamente, abbiamo definito il coseno di un angolo in termini di lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo. Adesso, abbiamo deciso di dare un significato anche quando *C* è troppo grande per stare in un triangolo rettangolo. Facciamo questo per avere un unico schema universale invece di tre schemi distinti. Ma, ciò che più conta, stiamo lasciando parlare la matematica. Stiamo ascoltando cosa vogliono gli angoli e le lunghezze. Vogliono generalizzare il coseno, e ci stanno dicendo di quale generalizzazione hanno bisogno. Sta a noi conciliarla con la nostra intuizione.

Un modo per farlo è immaginare un bastoncino (diciamo di lunghezza unitaria) ad un certo angolo con il pavimento.



A seconda di quest'angolo, l'ombra del bastoncino sarà più o meno lunga (sto assumendo che l'ipotetico sole si trovi sulla verticale). In effetti, possiamo vedere che la lunghezza di quest'ombra è esattamente ciò che abbiamo chiamato il coseno dell'angolo.

Adesso, all'aumentare dell'angolo, l'ombra diventa più corta, finché il bastoncino è dritto (ad angolo retto con il pavimento) e l'ombra ha lunghezza zero. Se continuiamo ad andare avanti, l'ombra riappare, ma *dall'altro lato*. La sua lunghezza è adesso il coseno dell'angolo vicino al nostro.



Quindi un bel modo di pensare alla nostra definizione estesa di coseno è ridefinire il coseno di un angolo come l'ombra di un bastoncino di lunghezza unitaria, tenendo presente non solo la lunghezza dell'ombra ma anche la sua *direzione*. Insomma, le ombre dallo stesso lato dell'angolo sono considerate positive, e quelle dall'altro lato negative. Con questa scelta di significato per il coseno, abbiamo un'unica relazione pitagorica valida per tutti gli angoli:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C).$$

Una cosa che questa formula ci dice è che angoli e lunghezze non sono collegati direttamente poichè l'informazione sull'angolo deve essere fornita indirettamente, attraverso il coseno. È come se gli angoli avessero bisogno di un ambasciatore, sottoforma di coseno, che li rappresenti nelle loro relazioni con le lunghezze. Angoli e lunghezze abitano in mondi diversi e parlano lingue diverse. Seno e coseno servono da dizionario, per convertire misure angolari in misure di lunghezza.

Mostra che se un triangolo ha lati *a* e *b*, che determinano un angolo C, allora la sua area è $\frac{1}{2}ab\sin(C)$.

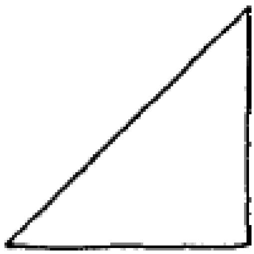
Qual è l'angolo tra le facce di un tetraedro regolare? E tra quelle degli altri poliedri regolari?

Mostra che si può riempire completamente lo spazio usando ottaedri e tetraedri regolari. Riesci a trovare altri modi per riempire lo spazio tridimensionale con poliedri simmetrici?

20

Dato un angolo (misurato, diciamo, come frazione di un giro completo), come possiamo determinarne seno e coseno? Inversamente, se conosciamo seno e coseno, come possiamo risalire all'angolo stesso?

Alcuni angoli hanno seno e coseno piuttosto facili da misurare. Ad esempio, un angolo di $\frac{1}{8}$ (o 45 gradi) dà vita ad un triangolo rettangolo che è metà quadrato.



Ciò significa che seno e coseno sono uguali al rapporto tra il lato di un quadrato e la sua diagonale, ossia a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Quanto valgono seno e coseno di un sesto di giro?

In verità, seno e coseno di un angolo sono un po' ridondanti; se ne sai uno puoi dedurre l'altro. La loro connessione è data dalla relazione pitagorica. Riesci a scoprire qual è questa connessione?

Qual è la relazione tra seno e coseno di un angolo?

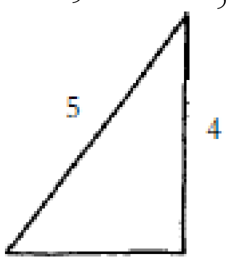
La cosa naturale da fare, a questo punto, sarebbe quella di iniziare a compilare una tavola di seni e coseni dei vari angoli. È esattamente quello che fecero astronomi e navigatori seicento anni fa: le navi percorrevano lunghe distanze e ragionevolmente servivano misure accurate per la navigazione.

Ovviamente, in quella situazione, tutto ciò che occorreva erano approssimazioni. Il seno di 45 gradi è circa 0.7071, e questo è un valore sufficientemente adatto ad ogni proposito pratico. Per scopi meno pratici, come per la geometria, semplicemente non è così. Se vogliamo misurare forme immaginarie perfette ci occorrono i valori esatti di seno e coseno.

Sfortunatamente, è una cosa piuttosto difficile da fare, anche quando l'angolo è una bella frazione di giro completo. Ad esempio, seno e coseno di $\frac{3}{13}$ sono numeri estremamente spiacevoli. Sono senz'altro irrazionali, e sebbene possano essere espressi come radici di vario genere, non è poi tanto facile riuscirci. È molto meglio chiamarli seno e coseno di $\frac{3}{13}$ e lasciarli così.

Peggio ancora, se l'angolo è esso stesso cattivo, ossia in rapporto irrazionale con il giro completo, allora seno e coseno sono in genere numeri trascendenti. Ciò significa che non abbiamo un modo algebrico di alcun tipo per riferirci ad essi. Come con il numero π, non abbiamo altra scelta che quella di accettare che numeri come $\sin(\frac{1}{\sqrt{17}})$ siano semplicemente privi di una descrizione più semplice. Ancora una volta dobbiamo estendere il nostro linguaggio provando a fare del nostro meglio.

Qualcosa di simile accade quando proviamo a determinare un angolo di cui conosciamo seno e coseno. Ad esempio, l'angolo coinvolto nel bel triangolo rettangolo 3,4,5 ha seno $\frac{4}{5}$ e coseno $\frac{3}{5}$.



Ma qual è l'angolo? Quale frazione di giro completo? Anche questo numero risulterà trascendente. Ciò significa che “l'angolo il cui seno è $\frac{4}{5}$”

è la migliore spiegazione che possiamo sperare di ottenere. Semplicemente non c'è modo di prendere i numeri 3,4 e 5 e arrivare alla misura dell'angolo attraverso una sequenza finita di operazioni algebriche.

Dopotutto è una situazione molto deprimente (e un po' imbarazzante). Siamo riusciti a ridurre *qualunque* problema di misura di poligoni alla questione essenziale di come seno e coseno di un angolo dipendono dallo stesso angolo, e quel che ti sto dicendo è che questo problema è (in generale) intrinsecamente insolubile. Ciò non significa che non ci siano certi begli angoli – come $\frac{1}{8}$ o $\frac{1}{6}$ – i cui seno e coseno sono bei numeri che è possibile esprimere algebricamente, ma piuttosto che questi sono un'infima minoranza.

Ciò che trovo interessante in una situazione come questa è che possiamo porre problemi geometrici perfettamente naturali a cui non siamo in grado di rispondere. Inoltre, sappiamo dimostrare che essi non hanno risposta. In altre parole, possiamo conoscere che qualcosa è inconoscibile. Forse ciò non è così deprimente – è un risultato umano piuttosto stupefacente!

Ovviamente, non ho fatto niente per spiegare come facciamo a sapere certe cose. Tutto va bene fin quando devo dire che questo e quell'altro numero sono trascendenti; spiegare il perché è tutta un'altra cosa.

Mi trovo ora in un bell'impiccio. Penso sia importante che tu capisca la natura positiva di affermazioni come "π è trascendente" o "$\sqrt{2}$ è irrazionale". Quando un matematico come me dice che qualcosa è impossibile, che π non sia rappresentabile algebricamente o che non c'è frazione il cui quadrato è due, non sta dicendo qualcosa di negativo su quello che non abbiamo o non sappiamo. Sta parlando di quel che abbiamo: una spiegazione! Sappiamo che $\sqrt{2}$ è irrazionale, e capiamo il perché. Abbiamo una spiegazione perfettamente razionale – precisamente l'argomento pitagorico sui numeri pari e dispari.

Nei secoli, la matematica, come ogni altra forma d'arte ha raggiunto una certa profondità. Molte opere d'arte sono estremamente sofisticate e richiedono anni di studio per essere adeguatamente capite ed apprezzate. Sfortunatamente, questo è il caso della trascendenza di π. Esistono dimostrazioni, anche molto belle, ma ciò non significa che io possa spiegartele qui adesso. Per ora, temo tu debba credermi sulla parola.

Possiamo usare il pentagono regolare per trovare seno e coseno di un quinto di giro?

21

Cosa vogliamo dalla trigonometria? Nel migliore dei mondi possibili, ci piacerebbe riuscire a determinare *tutte* le misure di ogni triangolo assegnato. Diciamo che un triangolo è stato completamente misurato quando conosciamo angoli, lunghezze dei lati e area. Senza dubbio, dobbiamo conoscere almeno qualcuna di queste misure sin dall'inizio per sapere di che triangolo stiamo parlando.

Quanta informazione ci occorre? Quali combinazioni di informazioni su lati e angoli sono sufficienti ad individuare precisamente un triangolo? Ci sono varie possibilità:

Tre lati. In questo caso, il triangolo è senz'altro univocamente determinato. Il teorema di Pitagora generalizzato può essere usato per trovare gli angoli (o almeno i loro coseni, che è moralmente lo stesso ed è il massimo che possiamo ragionevolmente sperare). La formula di Erone ci da direttamente l'area a partire dai tre lati, quindi abbiamo completato la misurazione del triangolo.

Due lati. Questa non è in genere un'informazione sufficiente a specificare un triangolo particolare, a meno che non si abbiano ulteriori informazioni sugli angoli. Se conosciamo l'angolo tra i due lati, o almeno il suo coseno, allora otteniamo il terzo lato dal teorema di Pitagora generalizzato, ed è fatta. Altrimenti, se ciò che abbiamo è uno degli altri angoli, non sarà sufficiente a determinare il triangolo. Capisci perché?

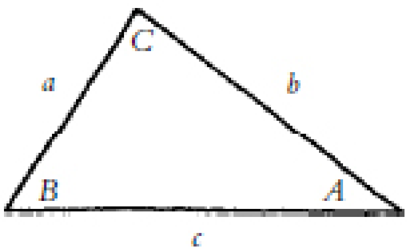
Perché due lati e un angolo sono in genere insufficienti a specificare un triangolo?

Ovviamente, se avessimo due degli angoli sarebbe un altra storia. Poiché gli angoli di un triangolo assommano sempre a mezzo giro completo, la conoscenza di due ci consente di conoscerli tutti e tre. In particolare, se abbiamo due lati e due angoli, possiamo scoprire l'angolo tra i lati e siamo a posto.

Un lato. Questa è un'informazione insufficiente; dobbiamo conoscere tutti gli angoli. Un lato e un angolo non bastano. D'altra parte, conoscere tutti i tre angoli ci dice la forma del triangolo, il che determina il triangolo a meno di passaggi di scala. Ognuno dei tre lati quindi inchioderebbe completamente il triangolo (dovremmo anche riuscire a specificare quale lato opposto a quale angolo). Il problema allora sarebbe quello di scoprire la lunghezza degli altri due lati. Dati gli angoli di un triangolo, e uno dei lati, come possiamo determinare gli altri due?

Un modo più elegante (e simmetrico) per trattare questi problemi è trattarli in termini di proporzioni. Ci basterà semplicemente conoscere i rapporti tra i lati e, avendone uno, potremmo facilmente ricavare gli altri. La cosa bella delle proporzioni è che sono indipendenti dalla scala; dipendono solo dagli angoli del triangolo. Quindi riformuliamo la nostra domanda. Dati gli angoli di un triangolo, come possiamo ricavarne le relative proporzioni tra i lati?

Nei termini della nostra notazione convenzionale, ci stiamo chiedendo come il rapporto $a:b:c$ dipende dagli angoli A, B e C.



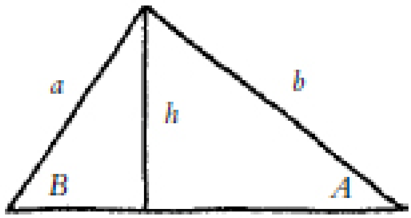
È facile vedere che lati maggiori sono opposti ad angoli maggiori; il punto è vedere se riusciamo ad essere più precisi.

Poiché stiamo parlando di angoli e lunghezze, ci aspettiamo che seno e coseno naturalmente appaiano, ed infatti lo fanno. La relazione tra i lati e gli angoli opposti in un triangolo è una delle strutture più belle della geometria: i lati sono proporzionali ai seni degli angoli. In altre parole

$$a:b:c=\sin(A):\sin(B):\sin(C).$$

Questo risultato è in genere chiamato **legge dei seni** (il nostro teorema di Pitagora generalizzato è spesso chiamato legge dei coseni, ma credo che sia una scelta infelice).

Per capire perché ciò sia vero, traccia la solita perpendicolare.



Osserva che quest'altezza h è opposta ad entrambi gli angoli A e B. Ciò significa che

$$\sin(A)=\frac{h}{b} \qquad \text{e}$$

$$\sin(B)=\frac{h}{a} \qquad .$$

Dividendo, si ha:

$$\frac{\sin(A)}{\sin(B)}=\frac{h/b}{h/a}=\frac{a}{b}\ .$$

Quindi $a:b=\sin(A):\sin(B)$ e i lati sono nello stesso rapporto dei seni degli angoli opposti. Come nel teorema di Pitagora generalizzato, vediamo che gli angoli forniscono informazioni sulla lunghezza dei lati attraverso seni e coseni. La legge dei seni è un'espressione di questa idea, che amo per la sua simmetria.

Una cosa da osservare in questo argomento è che presuppone che tutti gli angoli siano acuti (cioè minori di un angolo retto). Che succede se abbiamo un triangolo con un angolo ottuso? Questi triangoli soddisfano ancora la legge dei seni? In particolare, sappiamo almeno cos'è il seno di un angolo del genere?

Come possiamo definire il seno di un angolo ottuso?
Possiamo farlo in modo che la legge dei seni resti valida?

Usando la legge dei seni, il teorema di Pitagora e la formula di Erone, riusciamo a misurare perfettamente un triangolo qualsiasi – almeno nel senso che possiamo ridurre la misura di qualunque triangolo (e quindi di qualunque poligono) alla determinazione di un mucchio di seni e coseni.

A questo punto, in genere, è tutto finito, a meno che non vi sia qualche sorta di straordinaria simmetria o coincidenza, a causa della natura trascendente di seno e coseno. Lo scopo della trigonometria diventa quindi non di calcolare questi numeri ma di trovare strutture e relazioni tra di essi.

Come sono collegati seno e coseno di un angolo a quelli di un angolo grande il doppio?

Vorrei sottolineare che tutto quanto abbiamo detto per i poligoni funziona ugualmente in tre dimensioni per i poliedri. In particolare, i poliedri possono essere sempre suddivisi in varie piramidi, e queste possono essere misurate attraverso i triangoli. In tal modo, ogni problema sui poliedri conduce nuovamente a seni e coseni.

Prova che se due bisettrici di un triangolo sono uguali allora il triangolo è isoscele.

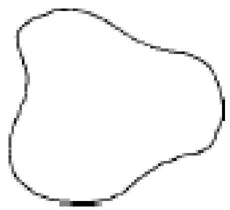
Mostra che se una figura con quattro lati *a*, *b*, *c* e *d* è inscritta in un cerchio, allora la sua area è data dalla formula di Brahmagupta:

$$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

dove $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

22

Quali forme ci restano da misurare? La risposta è... la maggior parte. In effetti, non abbiamo nemmeno accennato alla grande maggioranza di forme esistenti. Ogni oggetto che abbiamo trattato aveva qualche sorta di proprietà speciale, come lati dritti o simmetria, che lo rendeva speciale e atipico. La maggior parte delle forme non possiede tali caratteristiche distintive. Molte forme sono asimmetriche e brutte, curve e senza particolari carattetistiche di bellezza.



Ma perché dovremmo voler lavorare con qualcosa del genere? Perché dovremmo (e dovresti) spendere tempo ed energie per comprendere un simile pasticcio? E anche se volessimo farlo, come potremmo? Come potremmo anche solo descrivere, figuriamoci misurare, una forma con curve irregolari come questa? E, addirittura, cosa intendiamo con "questa" - *questa quale*? Di quale forma esattamente sto parlando adesso?

Se stessi facendo qualcosa di pratico, potrei semplicemente dire, "la forma nel diagramma" e avrei concluso. Il disegno stesso sarebbe la forma e su di esso si potrebbero eseguire misure approssimative.

Matematicamente, però, la figura non è di alcun aiuto. Un diagramma, essendo parte del mondo fisico in cui viviamo, è troppo rozzo e impreciso per rimandare ad un oggetto matematico specifico. E non è soltanto un problema di accuratezza. Un cerchio inciso nell'oro da un laser preciso al miliardesimo di pollice è tanto irrilevante quanto uno su un foglio uscito da un asilo. Nessuno dei due è un vero cerchio.

È importante capire che diagrammi e modelli vari sono fatti di atomi, non di ideali punti immaginari. In particolare, ciò significa che un diagramma non può descrivere accuratamente niente. Non che i diagrammi siano completamente inutili; dobbiamo solo capire che il loro ruolo non è di specificare o definire qualcosa ma di stimolare la creatività e l'immaginazione. Un cerchio costruito su un foglio di carta non sarà un cerchio, ma può comunque darmi delle idee.

Dunque, come faremo a descrivere una particolare forma irregolarmente curva? Una forma del genere conterrà infiniti punti e, a differenza che in un poligono, nessuna collezione finita di essi sarà sufficiente a determinare la forma – ci servirà una lista infinita di punti. Ma come posso pensare a una forma, o parlartene, se devo procurarmi una lista infinita di informazioni? Il punto non è di quali forme *vogliamo* parlare, ma di quali forme *riusciamo* a parlare.

La verità fastidiosa è che di molte forme non si riesce a parlare. Esistono, è vero; ma semplicemente non c'è modo di riferirsi ad esse. Essendo umani, usando linguaggi finiti su tempi di vita finiti, i soli oggetti matematici che potremo trattare sono quelli che hanno descrizioni finite. Un arbitrario schizzo di infiniti punti non potrà mai essere descritto, e nemmeno una curva arbitraria.

Voglio dire che le sole forme che saremo mai in grado di specificare sono quelle che hanno un pattern tale da consentire di descrivere un'infinità di punti in maniera finita. La ragione per cui possiamo parlare del cerchio non sono i ritagli dell'asilo, ma la frase "tutti i punti ad una certa distanza da un centro fissato". Poiché il cerchio ha un pattern così semplice, non mi serve dirti dov'è ognuno dei suoi punti; mi basta semplicemente spiegarti a quale pattern obbediscono.

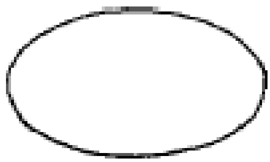
Penso sia il massimo che possiamo fare. Le sole forme di cui possiamo parlare sono quelle che hanno un pattern, ed è proprio il pattern - un insieme finito di parole in un linguaggio finito - a definire la forma.

Forme che non possiedono tale struttura (temo la grande maggioranza) non potranno mai essere discusse, né tantomeno misurate, da alcun essere umano. L'insieme degli oggetti che possiamo pensare e descrivere agli altri è limitato a priori dal fatto che siamo esseri umani. È una specie di tema conduttore della matematica. Per esempio, i soli numeri di cui possiamo parlare sono quelli con un pattern; molti numeri non possono nemmeno essere nominati.

La geometria, quindi, non riguarda tanto le forme vere e proprie, quanto i pattern verbali che le definiscono. Il problema centrale della geometria è di prendere questi pattern e produrre misure – numeri che a loro volta devono essere necessariamente espressi da sequenze verbali. Abbiamo già parlato dei poligoni, che possono facilmente essere specificati da una lista finita di lati e angoli, e dei cerchi, che hanno il proprio pattern, molto semplice. Quali sono altre strutture di cui possiamo parlare? Quali sono le descrizioni possibili? Di quali curve, oltre ai cerchi, possiamo parlare?

23

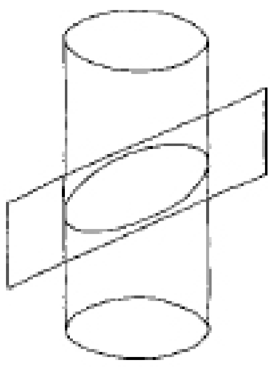
C'è una curva oltre al cerchio che abbiamo già incontrato, ed in effetti è uno degli oggetti più vecchi e belli di tutta la geometria: l'ellisse.



Un'ellisse è un cerchio dilatato – un cerchio che è stato allungato di un certo fattore in una direzione. Come tale, è una ben precisa e specifica forma. Forse dovrei dire una specifica classe di forme, poiché ci sono diversi tipi di ellisse a seconda del fattore di allungamento. Se vuoi, puoi pensare al cerchio stesso come ad un particolare tipo di ellissi – con fattore di allungamento 1!

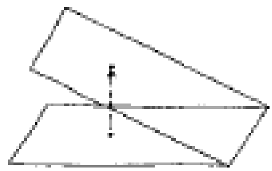
Il punto è che non ogni vecchia forma ovale è un'ellisse; solo una curva specifica con una struttura specifica, precisamente quella di un cerchio dilatato. In effetti, ci sono diversi modi distinti di descrivere un'ellisse, e l'interazione tra queste varie descrizioni dà vita a della matematica molto bella e affascinante.

Ad esempio, uno dei modi più belli di pensare ad un'ellisse è come un cerchio visto sotto un certo angolo. Un altro modo di dirlo è che un'ellisse è ciò che ottieni quando tagli un cilindro con un piano obliquo.

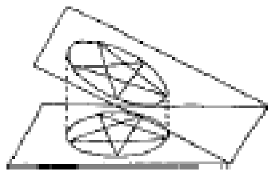


È senz'altro chiaro che tagliando un cilindro in questo modo ottieni una sorta di forma curva, ma come possiamo essere certi che sia un'ellisse, anziché qualche altra figura curva ovale? Qual è esattamente la connessione tra sezioni trasversali oblique e dilatazioni?

Penso che il modo più semplice di capire la situazione sia immaginare due piani nello spazio che si incontrano ad un certo angolo.

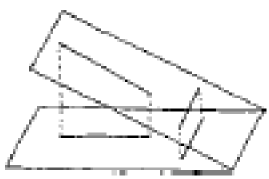


Per semplicità, supponiamo che il primo piano sia orizzontale. Ogni punto su questo piano può essere innalzato ad un punto corrispondente sul piano inclinato. In tal modo ogni forma sul primo piano può essere trasformata in una nuova forma sul secondo piano.



Questo tipo di trasformazione è chiamato **proiezione**. Quindi stiamo dicendo che un'ellisse è la proiezione di un cerchio. Ovviamente, si tratta solo di nuova terminologia; dobbiamo ancora capire perché è vero. Perché, quando un cerchio viene proiettato, subisce una dilatazione?

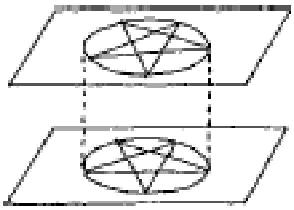
La ragione è che una proiezione è una dilatazione. Sono esattamente lo stesso processo. O piuttosto, sono due diversi processi che hanno esattamente lo stesso effetto. Per capirlo, considera la retta di intersezione dei due piani.



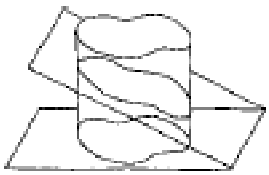
Immagina due bastoncini sul primo piano, uno parallelo alla retta e l'altro perpendicolare. Dopo la proiezione, il primo bastoncino è ancora parallelo alla linea, e la sua lunghezza non è cambiata. Il bastoncino perpendicolare resta perpendicolare, ma si allunga – la proiezione allunga le distanze in una direzione ma non nell'altra. In altre parole, una proiezione produce una dilatazione nella direzione perpendicolare alla linea di intersezione dei due piani. Osserva che aumentando l'angolo tra i due piani, aumenta il fattore di allungamento.

Come dipende esattamente il fattore di dilatazione dall'angolo tra i due piani?

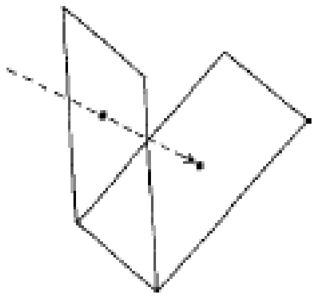
Osserva pure che se due piani sono paralleli, la proiezione non fa proprio niente – è la dilatazione di fattore 1!



In ogni modo, ora abbiamo un modo radicalmente nuovo di guardare alla dilatazione. Piuttosto che come l'allungamento di un singolo piano, possiamo vederla come proiezione attraverso lo spazio di un piano su un altro. In particolare, la dilatazione di *qualunque* oggetto (non solo di un cerchio) si può vedere come opportuna sezione trasversale del cilindro generalizzato con quell'oggetto come base.



Possiamo anche immaginare proiezioni dove nessun piano è necessariamente orizzontale, e la direzione in cui i punti sono stati proiettati non è necessariamente verticale. In altre parole, possiamo scegliere due piani qualunque ed una direzione qualunque, ed otterremo una proiezione che trasforma le forme su un piano in forme dell'altro piano.



La domanda è se queste proiezioni più generali fanno qualcosa di nuovo, o continuano ad essere soltanto dilatazioni?

Le proiezioni in qualunque direzione producono sempre dilatazioni?

24

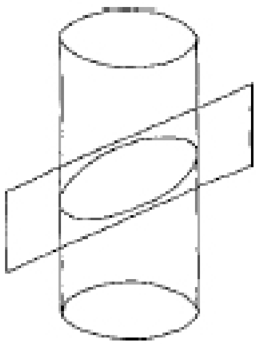
Un approccio completamente diverso alle ellissi passa per le cosiddette *proprietà focali*. Si verifica che ogni ellisse possiede due punti speciali, detti punti focali, con la straordinaria caratteristica che ogni punto sull'ellisse ha la stessa distanza *totale* da essi.

In altre parole, se un punto viaggia lungo il perimetro dell'ellisse, le distanze dai due punti focali varieranno, ma la loro somma resterà costante. Ciò consente di descrivere l'ellisse in un nuovo modo, come “l'insieme dei punti le cui distanze da due punti fissi hanno somma costante”, o con qualche frase del genere. Alcuni addirittura scelgono di prendere questa come propria definizione di ellisse.

Ovviamente, non importa se pensi all'ellisse come ad un cerchio dilatato di cui scopri un'interessante proprietà focale o se pensi alla proprietà focale come caratteristica che definisce l'ellisse, che poi scopri essere un cerchio dilatato. In ogni caso, c'è del lavoro per noi. Voglio dire che un cerchio dilatato è una cosa e una curva con punti focali ne è un'altra. Perché dovrebbero essere la stessa cosa? Più precisamente, come possiamo provare che sono la stessa cosa?

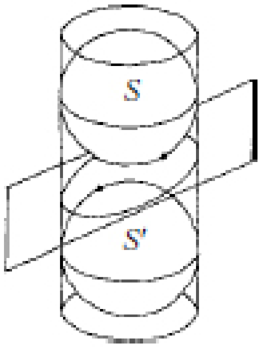
Questo è il tipo di cose che amo della matematica. Non solo ci sono scoperte sorprendenti da fare, ma hai anche l'ulteriore sfida di capire perché una tal cosa dovrebbe essere vera e di elaborare una spiegazione bella e logica. Hai tutto il piacere della scienza e dell'arte in un colpo solo e, inoltre, è tutto nella tua testa!

Voglio mostrarti un argomento ingegnoso (scoperto da Dandelin nel 1822) che spiega perché i cerchi dilatati hanno questa proprietà focale. Iniziamo a vedere il nostro ellisse come una sezione trasversale di un cilindro con un piano inclinato.



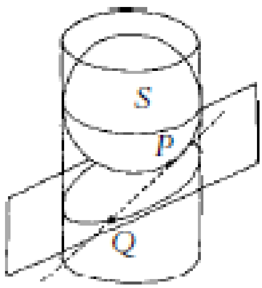
Se vogliamo riuscire a dimostrare che questa curva soddisfa la proprietà focale, dove possono mai essere i punti focali? La risposta è straordinariamente bella.

Prendi una sfera S (dello stesso diametro del cilindro) e lasciala cadere nel cilindro dall'alto, in modo che cadendo tocchi il piano inclinato in un punto P. Fai la stessa cosa con una sfera S' da sotto, spingendola fino a che non tocca il piano in un punto P'.



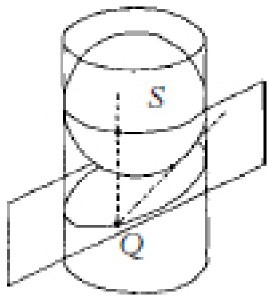
Questi due punti *P* e *P'* sono i due punti focali. È o non è favoloso?

Ovviamente per confermarlo, dobbiamo mostrare che qualunque punto scegliamo sull'ellisse, la distanza totale da questi due punti è sempre la stessa. Supponiamo che *Q* sia un punto arbitrario sull'ellisse. Ora immagina la linea che unisce *P* e *Q*.

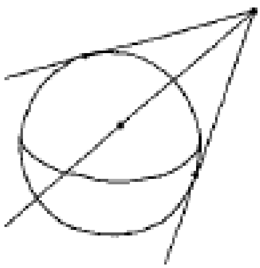


Questa linea ha una caratteristica molto interessante: tocca la sfera S esattamente una volta. Ciò è piuttosto inusuale. Molte linee o mancano del tutto la sfera o le passano attraverso, incontrandola due volte. Una linea che tocca una sfera solo una volta è detta **tangente** (dal latino *tangéntem*, che tocca). La linea tra *P* e *Q* è tangente alla sfera *S* perché è contenuta nel piano che tocca la sfera solo in *P*.

C'è un altro modo per tracciare una tangente ad *S*, ed è quello di tirare una linea verticale attraverso *Q*, che interseca la sfera *S* sul suo equatore.



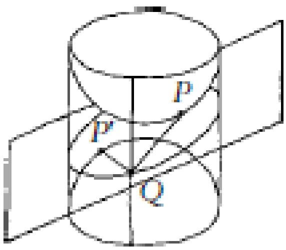
In generale, esistono molte tangenti ad una sfera da un dato punto. La cosa interessante è che hanno tutte la stessa lunghezza.



Insomma, la distanza da un punto fuori dalla sfera a quello in cui la sfera incontra la tangente è lo stesso qualunque sia la tangente scelta.

Perché le tangenti da un dato punto alla sfera hanno tutte la stessa lunghezza?

In particolare, la distanza dal nostro punto *Q* al presunto punto focale *P* è la stessa della distanza verticale di *Q* dall'equatore di *S*. Per semplificare, lasciami tagliare il nostro cilindro originale agli equatori delle due sfere.



Quindi stiamo dicendo che la distanza da Q a P è la stessa della distanza da Q alla sommità del cilindro, e analogamente, la distanza da Q a P' deve essere la stessa di quella da Q alla base del cilindro. Ciò significa che la distanza totale da Q ai due punti P e P' deve essere semplicemente l'altezza del cilindro. Essendo questa altezza indipendente dalla posizione del punto Q, la nostra ellisse soddisfa davvero la proprietà focale, e questa bella dimostrazione ce ne spiega il perché. Che opera d'arte ispirata!

Ma come si è arrivati ad un'argomentazione tanto ingegnosa? Allo stesso modo in cui si è arrivati ad una *Madame Bovari* o ad una *Monna Lisa*. Non ho idea di come accada. So solo che quando mi accade, mi sento molto fortunato.

Un cerchio è un tipo particolare di ellisse.
Dove sono i suoi punti focali?

25

Adesso voglio parlarti di un'altra notevole proprietà dell'ellissi, che è interessante non solo matematicamente ma anche dal punto di vista del "mondo reale". Probabilmente il modo più semplice per descriverla è pensare ad un'ellissi come ad una sorta di tavolo da biliardo con una sponda elastica che percorre tutto il suo perimetro. Immagina che vi sia una buca in uno dei punti focali e una palla nell'altro. Allora, accade che in qualunque direzione tu lanci la palla, rimbalzerà sempre sulla sponda in modo da finire in buca!

In altre parole, le ellissi sono fatte in maniera tale che le linee da un punto focale sono riflesse in linee all'altro punto focale. Geometricamente, ciò significa che le due linee incontrano l'ellisse ad *angoli uguali*.

Quel che rende tutto un po' complicato è il fatto che stiamo parlando di una curva; cosa significa esattamente angolo?

Il modo più elegante per uscire da questo dilemma è di usare la tangente: una linea che tocca l'ellisse in un solo punto. Per ogni punto sull'ellisse esiste un'unica linea tangente nel punto che indica la direzione in cui la curva è piegata.

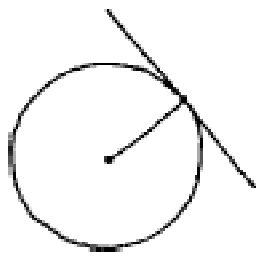
Questo ci fornisce un modo per parlare degli angoli formati da curve. L'angolo tra due curve è semplicemente l'angolo formato dalle loro tangenti.

L'uso di linee tangenti come aiuto per comprendere le curve è una tecnica antica e tradizionale. Le tangenti contengono molte informazioni su come si comportano le curve, ed essendo linee dritte, sono molto più facili da trattare della curva stessa.

Ora la "proprietà del tavolo da biliardo" può essere enunciata con precisione. Dice che, qualunque sia il punto sull'ellisse, le linee ai punti focali formano angoli uguali con la tangente.

Penso che dovremmo piuttosto chiamarla *proprietà della tangente* di un'ellisse (è un po' più dignitoso). Comunque la chiamiamo, è veramente un fatto bello e sorprendente sulle ellissi, e richiede una spiegazione.

Intanto, un bel caso speciale di questa proprietà riguarda il cerchio: una palla lanciata dal centro rimbalza sempre indietro verso il centro. La proprietà della tangente dice che la tangente ad un cerchio deve essere perpendicolare al raggio.



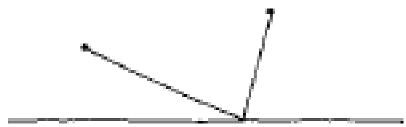
Perché la tangente ad un cerchio è perpendicolare al raggio?

Come ho detto prima, lo scopo di un matematico non è solo quello di scoprire verità affascinanti ma anche di spiegarle. Una cosa è disegnare delle ellissi e dire che accade questo e quest'altro – tutta un'altra cosa è dimostrarlo. Dunque voglio mostrarti una prova della proprietà della tangente. La spiegazione che ho in mente non solo è semplice e bella ma è anche abbastanza generale da applicarsi a molte altre situazioni oltre all'ellisse.

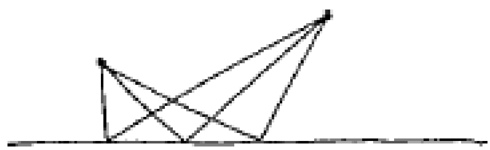
In effetti, partiamo da uno sguardo a un problema diverso (ma collegato). Supponiamo di avere due punti situati dallo stesso lato rispetto ad una linea infinita (è più facile pensare che la linea sia infinita in modo che la sua lunghezza e la sua posizione non costituiscano un problema).

Il problema è: qual è il percorso più breve da un punto all'altro che tocchi la linea? (Ovviamente, la condizione che tocchi la linea è la cosa interessante. Se eliminassimo questa richiesta, la risposta sarebbe semplicemente la linea dritta che collega i due punti.)

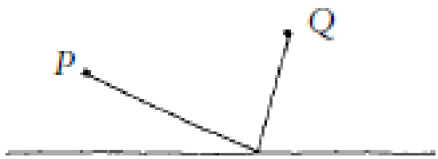
Chiaramente il percorso più breve deve essere qualcosa del genere:



Poiché il nostro percorso deve toccare la linea da qualche parte, niente è meglio che andare lì in linea retta. Il problema è, dove è lì? Tra tutti i possibili punti sulla linea, quale fornisce il percorso più breve? O, perlomeno, è importante il punto scelto? Potrebbero avere tutti la stessa lunghezza!

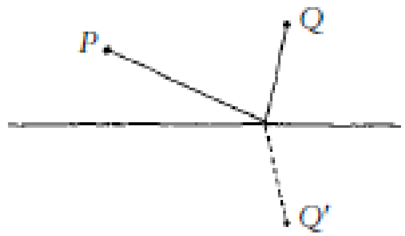


La verità è che è importante. C'è solo un cammino più breve, e ti dirò come trovarlo. Innanzitutto diamo dei nomi ai punti, diciamo *P* e *Q*. Supponiamo di avere un percorso da *P* a *Q* che tocchi la linea.

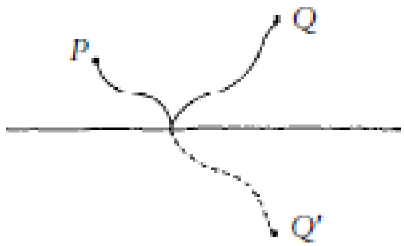


C'è un modo molto semplice di scoprire se un tal cammino è il più corto possibile. L'idea, che è una delle più sorprendenti e inaspettate di tutta la geometria, è quella di guardare la *riflessione* del percorso oltre la linea.

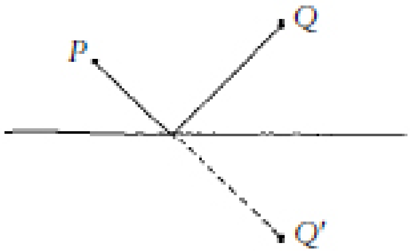
Più precisamente, prendiamo la parte del percorso dalla linea al punto *Q* e riflettiamolo dall'altra parte della linea.



Adesso abbiamo un nuovo percorso che inizia in *P*, attraversa la linea, e termina in *Q'*, riflesso del punto originale *Q*. In tal modo, *qualunque* cammino da *P* a *Q* che tocchi la linea può essere trasformato in un nuovo cammino da *P* a *Q'*.

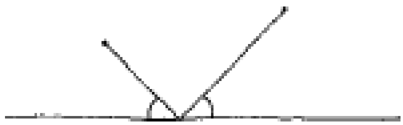


E ora, ecco il punto: il nuovo cammino ha esattamente la stessa lunghezza dell'originale. Ciò significa che il problema di trovare il cammino più corto da *P* a *Q* che tocchi la linea è esattamente lo stesso di quello di trovare il cammino più corto da *P* a *Q'*. Ma questo è facile – è semplicemente una linea dritta. In altre parole, il cammino che stiamo cercando, il più corto tra i due punti che tocchi la linea, è semplicemente il cammino che *una volta riflesso* diventa dritto.



Oltre ad essere di una bellezza assoluta, quest'argomento è anche un esempio eccellente del punto di vista matematico moderno che considera i problemi inserendoli in una rete di strutture e trasformazioni che conservano la struttura. In questo caso, le strutture rilevanti sono i percorsi e le loro lunghezze, e la chiave del problema è riconoscere la riflessione come la trasformazione giusta che preserva la struttura. Bisogna ammettere che questo è un punto di vista piuttosto professionale, ma credo sia una strategia preziosa per chiunque debba affrontare problemi di matematica.

Adesso che sappiamo perfettamente come appare il cammino più breve, possiamo pensare di fornirne qualche descrizione alternativa. Una delle più semplici è che risulta il cammino tale da formare angoli uguali con la linea. Il cammino più breve è quello che "rimbalza".

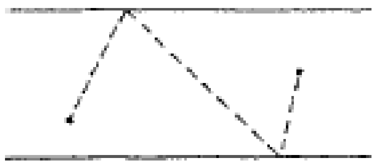


Perché il cammino più breve forma angoli uguali con la linea?

Ovviamente, tutto ciò serve a spiegare la proprietà della tangente delle ellissi. In quella situazione, abbiamo un cammino da un punto focale all'altro, passante per un punto sul perimetro. Vogliamo una spiegazione del perché gli angoli formati con l'ellisse (ossia con la tangente) devono essere uguali.

Ebbene, la ragione è che questo cammino è proprio il cammino più breve tra i punti focali passante per la linea tangente. Ciò discende subito dalla proprietà focale dell'ellisse: tutti i punti sull'ellisse hanno la stessa distanza totale dai punti focali. Ovviamente, i punti interni all'ellisse avranno una distanza totale minore, e i punti esterni una maggiore. In particolare, poiché ogni punto della tangente (distinto dall'effettivo punto di contatto con l'ellisse) è esterno all'ellisse, il cammino passante per un tal punto deve essere maggiore di quello per il punto di contatto.

Poiché il nostro cammino è il più breve, deve formare angoli uguali con la tangente. La proprietà della tangente, o effetto “tavolo da biliardo”, discende direttamente dalla proprietà focale dell'ellissi e dal fatto che i cammini più brevi sono sempre quelli che rimbalzano.



Supponi che due punti siano tra linee parallele. Qual è il cammino più breve da un punto all'altro che tocchi entrambe le linee?

26

Voglio dire ancora qualcosa sulla relazione tra geometria e realtà. Ovviamente, in un certo senso, sono completamente diverse, essendo la prima una costruzione totalmente immaginaria della mente umana e la seconda (presumibilmente) no. La realtà fisica era qui prima che ci fossero esseri umani coscienti, e sarà ancora qui quando noi ce ne saremo andati. La realtà matematica, d'altra parte, deve la sua effettiva esistenza alla coscienza. Un'ellisse è un'idea. Non esistono vere ellissi lì fuori nel mondo reale. Ogni cosa reale è necessariamente una contorta, oscillante massa di trilioni di atomi ed è quindi troppo complicata per essere descritta dagli esseri umani in maniera precisa.

Ci sono due differenze importanti tra gli atomi fisici (di cui sono fatte le cose reali) e i punti matematici che formano i nostri oggetti geometrici immaginari. Innanzitutto, gli atomi sono costantemente in moto e volano qua e là urtando tra di loro. Inoltre, gli atomi sono discreti – stanno lontani gli uni dagli altri. Due atomi non possono avvicinarsi più di tanto; le forze della natura (apparentemente) non gli consentono di avvicinarsi oltre. Ovviamente, non poniamo nessuna restrizione del genere ai nostri punti immaginari. Gli oggetti matematici sono governati da scelte estetiche, non da leggi fisiche. In particolare, una linea o una curva di punti è impossibile da realizzare fisicamente. Ogni "curva", fatta di particelle reali sarà necessariamente increspata con ogni genere di buchi – più simile ad una collana di perle che ad un capello (e ciò vale, ovviamente, anche per un vero capello).

D'altra parte, non si può dire che non ci sia alcuna connessione tra geometria e realtà. Forse nel mondo non c'è alcun cubo o sfera perfetti, ma se ne trovano di abbastanza ben approssimati. Qualunque proprietà matematica valida per cubi o sfere deve essere approssimativamente valida per una scatola di legno o una palla da bowling.

Un buon esempio è la proprietà della tangente di un ellisse. L'analogia del tavolo da biliardo non è solo un brillante artificio retorico; possiamo effettivamente costruire un tavolo da biliardo del genere, con tappeto verde e tutto il resto. Potrebbero servire un po' di tentativi ed errori per aggiustare la dimensione delle buche e l'elasticità delle sponde, ma potremmo riuscire a farlo effettivamente funzionare; potremmo tirare una vera palla in qualunque direzione e andrebbe sempre dentro. Sono state anche costruite stanze ellittiche che esibiscono la proprietà della tangente in un altro modo. Due persone stanno nei punti focali e si sussurrano qualcosa. Tutte le onde sonore emesse da una persona rimbalzano sulla parete e finiscono nell'orecchio dell'altra persona. Il risultato è che possono sentirsi l'un l'altro senza che nessun altro nella stanza riesca a sentire.

Quindi, com'è che queste cose effettivamente funzionano? Se atomi e punti sono così diversi, perché un tavolo da biliardo fatto di atomi si comporta come un'ellisse immaginaria fatta di punti? Qual è la connessione tra oggetti reali e oggetti matematici?

Innanzitutto, osserva che nessun tavolo da biliardo ellittico potrebbe funzionare se fosse troppo piccolo; ad esempio, se fosse fatto solo di poche centinaia di atomi. Quest'oggetto non si comporterebbe affatto come un'ellisse. Una palla di dimensioni atomiche passerebbe semplicemente attraverso i buchi nella parete o sarebbe coinvolta in qualche complicata interazione elettromagnetica con essa. Per comportarsi veramente in maniera geometrica, un oggetto deve contenere abbastanza atomi da cancellare statisticamente questo tipo di effetti. Deve essere abbastanza grande.

D'altra parte, se il tavolo da biliardo fosse troppo grande, diciamo della dimensione di una galassia, lo stesso non funzionerebbe a causa di effetti gravitazionali e relativistici. Per essere come un oggetto geometrico, un oggetto reale deve avere la giusta dimensione; precisamente, deve avere più o meno la *nostra* dimensione. Deve trovarsi più o meno alla scala in cui operano gli esseri umani. Perché? Perché siamo noi ad aver costruito la matematica!

Siamo creature di una certa dimensione, e sperimentiamo il mondo in un certo modo. Siamo troppo grandi per avere esperienze dirette con gli atomi; i nostri sensi non possono afferrare nulla di così piccolo. Quindi non abbiamo intuizione a quella scala. Le nostre immaginazioni sono dettate dalle nostre esperienze; è semplicemente naturale che il tipo di oggetti immaginari che creiamo nella nostra mente siano versioni semplificate e perfette di cose che abbiamo visto e sentito. Se fossimo stati di dimensioni radicalmente diverse, avremmo sviluppato un tipo diverso di geometria – almeno inizialmente. Nei secoli, sono state inventate molte geometrie diverse, alcune delle quali sono buoni modelli della realtà a scale molto grandi o molto piccole e alcune che addirittura non hanno niente a che fare col mondo reale.

Quindi la connessione tra geometria e realtà siamo *noi*. Siamo il ponte tra le due. La matematica risiede nelle nostre menti, le nostre menti sono prodotte dai nostri cervelli, i nostri cervelli sono parte dei nostri corpi, e i nostri corpi sono *reali*.

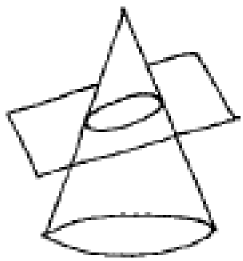
Sapresti costruire un modello approssimativo di ellissi usando una penna, due puntine e un pezzo di corda?

27

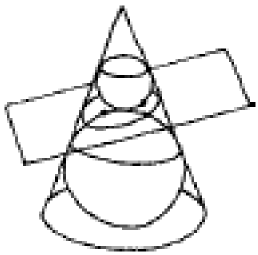
Un'ellisse è una di quelle rare forme di cui possiamo parlare; ha una struttura precisa, definita, che possiamo esprimere a parole. Chiaramente, tutto ciò che abbiamo fatto è stato prendere una struttura preesistente (precisamente quella della circonferenza) e modificarla un po'; l'ellisse non è comparso dal nulla all'improvviso. Un'ellisse è una circonferenza *trasformata*, ed è la trasformazione stessa (ossia la dilatazione) che munisce l'ellisse di tutte le sue proprietà e ci consente di parlarne. La classica definizione focale è un altro modo di generalizzare l'idea di una circonferenza con il suo centro.

Il punto è che abbiamo creato una nuova forma modificandone una vecchia. Ogni trasformazione geometrica può essere usata in questo modo, ammesso che si abbia una descrizione precisa di come funziona ("una sfera con un incavo" è un po' troppo vago). In particolare, se una forma ha una struttura definita, descrivibile, allora l'avrà anche ogni sua dilatazione.

Un modo semplice per ottenere forme nuove da quelle vecchie è quello di prendere sezioni trasversali. Le ellissi compaiono come sezioni trasversali dei cilindri. Che succede se sezioniamo altri oggetti tridimensionali? Una sfera è senz'altro un candidato interessante. Sfortunatamente, tutte le sue sezioni trasversali sono cerchi, per cui non abbiamo niente di nuovo. E le sezioni di un cono?



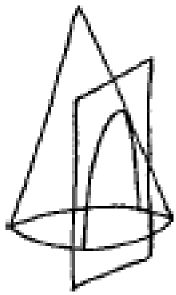
Sorprendentemente, risultano essere delle ellissi. Ciò può inizialmente sembrare strano, essendo i coni molto diversi dai cilindri. Ti aspetteresti una sezione trasversale a forma d'uovo più asimmetrica. D'altra parte, non è difficile modificare il nostro precedente argomento delle sfere di Dandelin per mostrare che le sezioni trasversali di un cono soddisfano esattamente la stessa proprietà focale.



Abbiamo di nuovo due sfere, di diversa dimensione questa volta, che toccano il piano ciascuna esattamente una volta. La differenza principale ora è che le sfere non toccano più il cono sui propri equatori ma su cerchi paralleli agli equatori. Ciononostante, lo stesso argomento delle tangenti mostra che le sezioni trasversali hanno la giusta proprietà focale, e quindi sono ellissi.

Riesci a sviluppare i dettagli di questa dimostrazione?

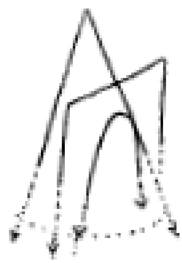
È uno stato di cose piuttosto deprimente – il passaggio da cilindri a coni non sembra fornirci nuove curve. Ma aspetta! Ci sono *altri* modi di tagliare un cono.



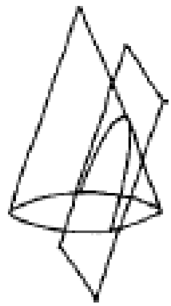
Data una certa inclinazione del cono, possiamo ottenere diverse sezioni trasversali a seconda che il piano secante sia più o meno inclinato del cono. Con un piano meno inclinato del cono avevamo un'ellisse. Che curva otteniamo adesso?

Certamente non è un'ellisse, questo è sicuro. Innanzitutto, non è chiusa – diventa sempre più grande man mano che il cono si allarga. Certamente, potremmo tagliarla ad un certo punto, ma ciò sembra piuttosto arbitrario.

Un'idea più semplice e più bella (almeno secondo me) è di immaginare un cono *infinito*, in modo che anche la sezione trasversale sia infinita. Il piano non esce mai dall'altro lato!



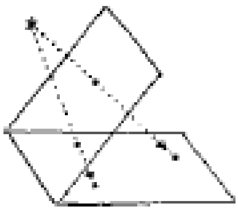
Le curve determinate dalle sezioni trasversali di un cono sono chiamate **sezioni coniche** o, più semplicemente, coniche. Esistono effettivamente tre tipi di sezioni coniche, dipendenti dall'inclinazione del piano. Se il piano è meno inclinato del cono, abbiamo un'ellisse. Se il piano è più inclinato del cono, abbiamo quel tipo di curva infinita di cui abbiamo appena parlato, chiamata **iperbole** (dal greco *yperbolè*, sovrabbondanza). L'ultima possibilità è che il piano sia inclinato esattamente tanto quanto il cono.



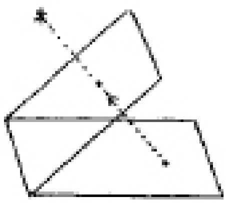
Questo tipo di conica, chiamata **parabola** (dal greco *parabolè*, mettere accanto), è anch'essa infinita ma (come scopriremo presto) ha una forma piuttosto diversa dall'iperbole.

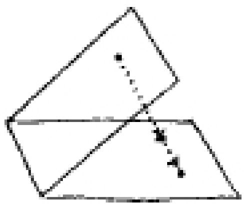
Il punto è che ci sono modi diversi di tagliare un cono e, a seconda del tipo di taglio, hai diversi tipi di curva con diverse proprietà. Le sezioni coniche furono studiate estesamente dai geometri classici, soprattuto da Apollonio (all'incirca nel 230 d.C.). Una delle grandi scoperte di questo periodo fu che iperboli e parabole hanno le proprie proprietà focali e di tangenza, proprio come l'ellissi. Ovviamente, voglio parlartene, ma prima penso sarebbe bello mostrarti qualcosa di diverso, un modo più moderno di pensare alle sezioni coniche.

L'idea è di pensarle *proiettivamente*. Immagina due piani nello spazio. Invece di scegliere una direzione particolare per la proiezione, fissiamo un punto nello spazio (su nessuno dei due piani) per proiettare *a partire da esso*.



I punti sul primo piano sono proiettati sul secondo piano da linee dritte passanti per questo punto. (A volte mi piace pensare al punto di proiezione come al sole, e alle immagini proiettate come a ombre). Ovviamente, niente ci dice che il secondo piano debba essere dietro al primo; possiamo proiettare verso il punto piuttosto che a partire da esso. Possiamo persino piazzare il punto di proiezione *tra* i due piani.

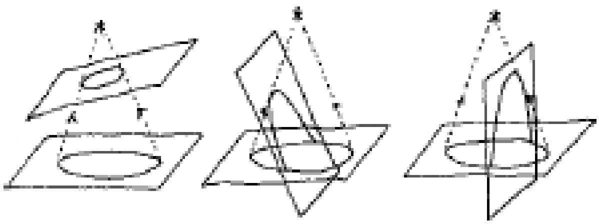




In ogni caso, abbiamo un nuovo tipo di proiezione, solitamente chiamato **proiezione centrale**, per distinguerlo da quella proiezione parallela di cui abbiamo parlato prima.

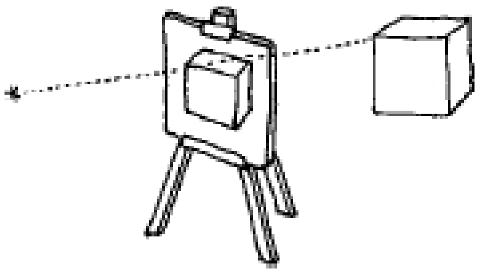
Qual è l'effetto di una proiezione centrale quando i piani sono paralleli? Quale quando il punto di proiezione si trova tra i due piani?

Entrambi i tipi di proiezione sono trasformazioni – modi di trasformare una forma nell'altra. Ciò fornisce un modo sistematico di creare forme nuove e collegarle a quelle vecchie. In particolare, possiamo vedere le sezioni coniche – ellisse, iperbole e parabola – come diverse proiezioni centrali di una circonferenza.



Una possibile interpretazione di questo fatto è che queste curve siano effettivamente delle circonferenze, soltanto viste da una diversa *prospettiva*.

In effetti, tutta la questione della prospettiva porta alla proiezione centrale. Lo stesso atto di vedere è una proiezione: il mondo esterno è proiettato attraverso la pupilla dell'occhio sulla retina. Un disegno in prospettiva è un tentativo di imitare questo processo, utilizzando un osservatore immaginario come punto di proiezione. La proiezione geometrica è solo l'ultima idealizzazione di questo processo.



Certamente, una volta che hai un'idea matematica, qualunque ne sia l'origine, ben presto ti riconduce alla realtà. Un genere completamente nuovo di geometria, la cosiddetta **geometria proiettiva**, sorse all'inizio del diciassettesimo secolo dal tentativo di capire la matematica della prospettiva.

Tre punti su una linea possono essere proiettati su qualunque altri tre punti collineari? E quattro punti?

28

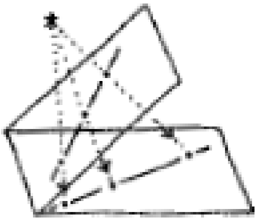
Poiché la proiezione corrisponde ad un cambio di prospettiva, è naturale pensare a due oggetti legati da una proiezione come ad uno solo; ossia come a due punti di vista diversi sullo stesso oggetto. La filosofia della geometria proiettiva è che le sole proprietà che importano in una forma sono quelle non modificate dalle proiezioni. Intrinsecamente, ciò che è "reale" di una forma non dovrebbe dipendere dal proprio punto di vista; la bellezza *non* dovrebbe essere nell'occhio dell'osservatore. Qualunque caratteristica cambi dopo una proiezione non è tanto una proprietà dell'oggetto quanto della maniera in cui viene osservato. È un modo piuttosto moderno di pensare. Abbiamo un certo tipo di trasformazione (la proiezione in questo caso) e siamo interessati alle strutture *invarianti* rispetto ad essa.

I triangoli sono tutti proiettivamente equivalenti?
E i poligoni di quattro lati?

La più grande differenza tra la geometria classica e quella proiettiva è che le misure tradizionali - angolo, lunghezza, area e volume - non hanno alcun significato. La proiezione deforma a tal punto una forma da cambiarne radicalmente tutte queste misure. In tal senso, la proiezione è estremamente distruttiva.

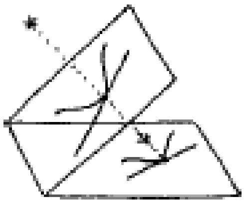
Quindi, se la geometria proiettiva non riguarda le misure, cosa riguarda? Quali cose restano inalterate dopo le proiezioni?

Un buon esempio è l'allineamento – ogni proiezione di una linea retta è ancora una linea retta. Da un punto di vista proiettivo, l'allineamento è "reale". In particolare se dei punti sono allineati (cioè se sono tutti sulla stessa linea), resteranno allineati dopo qualunque proiezione. Se le cose si allineano, si allineano; non dipende dal tuo punto di vista.



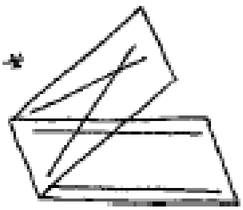
La proiezione di un poligono è sempre un poligono?

Un altro invariante proiettivo è la tangenza; se una linea è tangente a una curva in un certo punto prima della proiezione, sarà tangente anche dopo, anche se la forma della curva e la posizione della linea potrebbero cambiare.

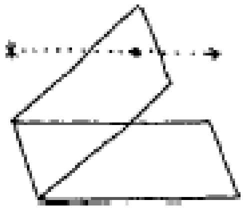


In generale, tutto ciò che riguarda le intersezioni è di solito un invariante proiettivo. Per due curve, sia il problema dell'eventuale intersezione che quello del numero di tali intersezioni, sono invarianti proiettivi. Non lo è, ad esempio, l'*angolo* al quale si incontrano. Questo sarà totalmente sconvolto.

In realtà, il problema dell'intersezione è un po' più complicato. L'intersezione *non* è proprio un invariante proiettivo. È possibile anche avere due linee rette secanti che, proiettate, diventano parallele.

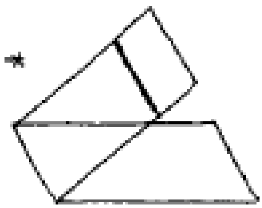


Ciò che accade qui è che il punto in cui si intersecano le due linee non appare affatto sul piano d'arrivo. In effetti, in ogni proiezione centrale, ci saranno punti particolari sul piano che non finiscono sull'altro.



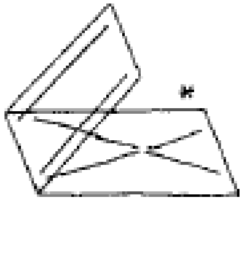
Il problema è che a volte la linea dal punto di proiezione è *parallela* al piano d'arrivo. Questo è una specie di disastro. Ciò significa che la proiezione è cattiva – perde informazioni. In particolare, può perdere informazioni sull'intersezione o meno di due linee.

Come se non bastasse c'è un'intera linea infinita di punti che scompare dopo la proiezione.



Nello specifico, è la linea parallela al piano d'arrivo che si trova alla stessa altezza del punto di proiezione. Tutti i punti su questa linea saranno persi nel processo di proiezione.

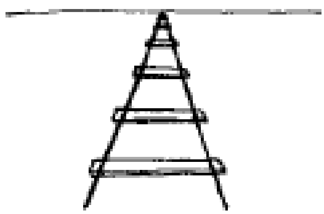
Qualcosa di ugualmente disastroso accade all'inverso. Se partiamo da linee parallele su un piano e le proiettiamo su un altro piano, otteniamo qualcosa di veramente mostruoso – due linee incrociate con il punto di intersezione *scomparso*.



Questo è, senz'altro, uno stato di cose completamente inaccettabile. Semplicemente non possiamo accettare simili brutture!

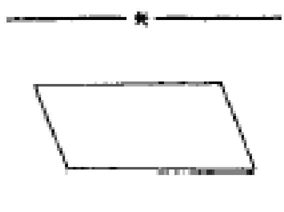
Cosa accade alla proiezione di tre linee parallele?

In realtà, è esattamente questa caratteristica della proiezione centrale ad essere responsabile del fenomeno della scomparsa del punto: le linee parallele, come quelle dei binari, sembrano incontrarsi in un punto all'orizzonte.



Da un punto di vista pratico, diciamo di un artista o un architetto, sono tutte buone notizie. È molto bello essere capaci di disegnare raffigurazioni convincenti di binari ferroviari, senza che nessuno perda il sonno per punti spariti. Matematicamente, però, è piuttosto fastidioso. Abbastanza fastidioso, infatti, da condurre i geometri ad un passo molto ardito e fantasioso: *ridefinire tutto lo spazio*.

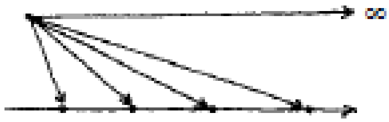
L'idea è davvero piuttosto ingegnosa. Ciò che non va nella proiezione è che non tutte le linee per un punto incontrano necessariamente un dato piano.



Il problema è che le cose possono essere parallele. Le linee possono essere parallele alle linee, i piani ad altri piani e, in questo caso, linee e piani possono essere paralleli. Poiché è il parallelismo a causare problemi, l'idea è di sbarazzarcene – fare in modo che linee e piani aventi la stessa direzione si incontrino effettivamente.

Il piano è questo: per ogni direzione nello spazio, immaginiamo un nuovo punto come fosse infinitamente lontano in quella direzione. L'idea è che tutte le linee in quella direzione si incontreranno ora in questo nuovo punto immaginario. È semplice. Basta immettere abbastanza nuovi punti (e uno per direzione è sufficiente) da fare in modo che linee e piani paralleli si intersechino.

Un bel modo di vederlo è immaginare una linea ed un punto e vedere come varie linee per quel punto intersecano la linea.



Man mano che le linee si avvicinano ad essere parallele, i punti di intersezione si spostano sempre più lontani sulla destra. La filosofia è che quando la linea diventa esattamente parallela, ha ancora un punto di intersezione, uno infinitamente lontano sulla destra.

Curiosamente, lo stesso accade alle linee dirette verso sinistra. I nuovi punti che stiamo aggiungendo si trovano infinitamente a sinistra *tanto quanto* a destra. È come se le nostre linee somigliassero a dei cerchi che passano per l'infinito e tornano dall'altro lato.

Sembrano i vaneggiamenti di un pazzo? Ammetto che ci vuole un po' di tempo ad abituarvisi. Forse obietterai a questi nuovi punti di essere immaginari: non esistono qui nella realtà. Ma nessuna delle cose di cui abbiamo parlato è reale. Innanzitutto, non c'è nessun "qui". Abbiamo costruito punti immaginari, linee, e altre forme in modo che le cose potessero essere semplici e belle: lo abbiamo fatto per amore dell'arte. Adesso lo stiamo facendo di nuovo, questa volta per rendere le proiezioni semplici e belle. È molto bello, una volta che ti ci abitui.

Questi punti che abbiamo aggiunto si chiamano *punti all'infinito*. Il nuovo spazio allargato che abbiamo creato, fatto dell'ordinario spazio tridimensionale più i punti all'infinito, è noto come **spazio proiettivo**. Si usa aggiungere i punti all'infinito necessari tanto sulle linee quanto sui piani.

Una *linea proiettiva* è quindi una linea ordinaria con il suo punto all'infinito corrispondente alla direzione. Un *piano proiettivo* è un piano, con tutti i punti all'infinito che ti aspetteresti – quelli corrispondenti alle varie direzioni del piano.

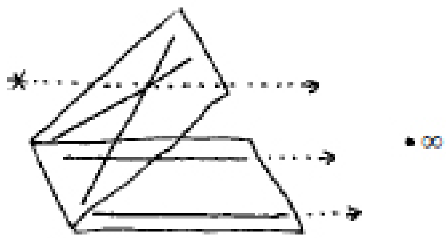
La conclusione è che abbiamo una nuova geometria, in cui il parallelismo è bandito. Due linee su un piano si intersecano, punto. Se si intersecavano prima, continuano a farlo. Se prima erano parallele, adesso si incontrano all'infinito. È una situazione molto più bella e simmetrica che nella geometria classica.

E due piani? In genere, due piani si intersecano in una linea. Cosa accade quando i piani sono paralleli? Osserva che piani paralleli hanno esattamente gli stessi punti all'infinito, e che questi punti quindi costituiscono l'intersezione dei due piani. Ciò rende auspicabile il vedere i punti all'infinito di un piano come se stessero su una *linea all'infinito*. Adesso possiamo dire in senso generale che due piani proiettivi nello spazio proiettivo si intersecano sempre in una linea proiettiva.

Similmente, è bello pensare all'insieme completo dei punti all'infinito nello spazio proiettivo come se fosse un piano proiettivo all'infinito. Quindi possiamo dire, per esempio, che una linea e un piano si incontrano sempre esattamente in un punto (a meno che, ovviamente, la linea non sia contenuta *nel* piano).

Due linee nello spazio proiettivo, si incontrano sempre?

Adesso che abbiamo un ambiente migliore in cui operare, la proiezione diventa una trasformazione dal comportamento impeccabile. Invece di trasformarsi in un disgustoso paio di linee incrociate prive del punto di intersezione, possiamo vedere le linee parallele incrociarsi quando il punto di intersezione si sposta dall'infinito ad un punto ordinario.



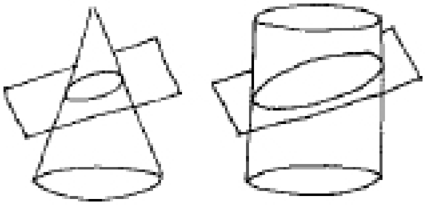
Certamente, il modo corretto di trattare uno spazio proiettivo è quello di dimenticare la distinzione tra punti ordinari e punti all'infinito. Proiettivamente, non esiste tale distinzione; ciò che è ordinario da una prospettiva è infinito dall'altra. Uno spazio proiettivo è un ambiente completamente simmetrico, e tutti i suoi punti sono originariamente uguali.

In particolare, la distinzione tra proiezione parallela e centrale è piuttosto fittizia. La proiezione parallela è semplicemente una proiezione centrale da un punto all'infinito. Dunque potremmo abbandonare gli aggettivi, sintomo di un pregiudizio classico, e chiamarle entrambe semplicemente *proiezioni.*

Abbiamo ora una trasformazione proiettiva completamente riformata, e abbiamo individuato alcuni suoi invarianti – allineamento, tangenza e intersezione. Riesci a trovarne altri?

Riesci a trovare un invariante proiettivo?

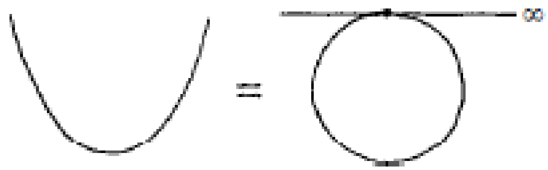
Ora posso essere un po' più preciso su qualcosa che ho menzionato prima – il fatto che le sezioni coniche possono essere pensate come proiezioni di un cerchio. Per un'ellisse non c'è molto altro da dire; abbiamo visto che alcune sezioni di coni e cilindri sono ellissi, e queste sono senz'altro proiezioni di una circonferenza.



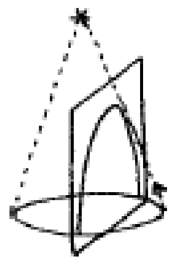
Il cono corrisponde a una proiezione centrale, mentre il cilindro ci da una proiezione parallela di un cerchio. Essendo proiettivamente esattamente la stessa cosa, ha senso pensare al cilindro come ad un tipo speciale di cono con vertice all'infinito.

Una parabola compare quando sezioniamo un cono alla stessa inclinazione del cono stesso.

In tal caso, stiamo ancora proiettando la circonferenza dal piano orizzontale al piano inclinato usando il vertice del cono come punto della proiezione. Quindi le parabole sono senz'altro proiezioni di una circonferenza. Osserva che c'è un solo punto della circonferenza che non viene proiettato sul piano proiettivo proprio ma su un punto all'infinito del piano inclinato. Ciò significa che una parabola è semplicemente un cerchio con uno dei suoi punti all'infinito. La linea all'infinito è quindi tangente alla circonferenza.

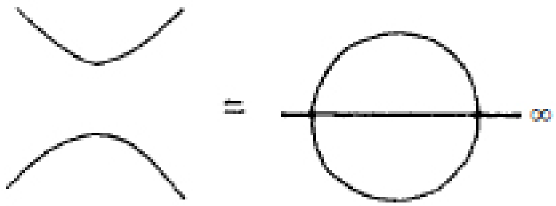


Per l'iperbole accade qualcosa di un po' strano.

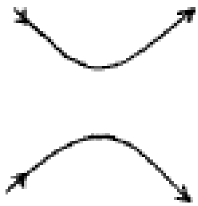


La parte di circonferenza *dietro* il piano secante si proietta bene, creando la caratteristica forma ad anfiteatro, ma dov'è il resto del cerchio? Sorprendentemente, appare *sopra* al cono. In altre parole, la proiezione centrale dal vertice del cono, non va solo verso giù ma anche verso su.

Quindi il cerchio si trasforma in *due* curve ad anfiteatro, una rivolta verso l'alto e e l'altra verso il basso. Un'iperbole, quindi, dovrebbe pensarsi come formata da due pezzi. È ancora la proiezione di un cerchio ma, questa volta, con due punti all'infinito.



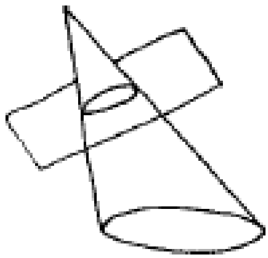
Camminando lungo un'iperbole, raggiungiamo l'infinito in una direzione, passiamo per il punto all'infinito in quella direzione, e torniamo dal lato opposto lungo l'altro pezzo.



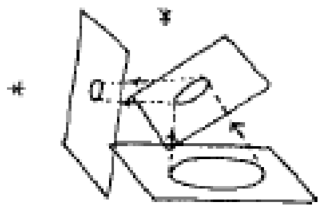
Quando un cono è sezionato da un piano a formare un'iperbole, quali sono i due punti della circonferenza proiettati all'infinito?

Quindi le sezioni coniche, a ben vedere, sono semplicemente circonferenze proiettate. Ciò significa che, proiettivamente parlando, *sono* circonferenze. La differenza tra esse, da un punto di vista classico, è in come la circonferenza interseca la linea all'infinito – se in zero, uno o due punti.

Non solo: accade pure che *ogni* proiezione di una circonferenza sia una sezione conica. Non importa come proietti una circonferenza, avrai sempre un'ellisse, una parabola o un'iperbole. Non ci sono altre curve lì fuori equivalenti a una circonferenza. In particolare, ciò significa che un cono inclinato fornirà le stesse sezioni trasversali di un cono retto.



Anche se la stessa base del cono è una sezione conica, diciamo un'ellisse, non avremo niente di nuovo. Insomma, una proiezione di una conica è ancora una conica.



In generale, una proiezione di una proiezione è sempre una proiezione. Volgarmente parlando, una visione prospettica della visione prospettica di qualcun altro è ancora una visione prospettica. Questa è una delle più belle caratteristiche della geometria proiettiva – lo spazio proiettivo e le trasformazioni proiettive formano un sistema chiuso, che è per molti versi più semplice e bello della geometria classica.

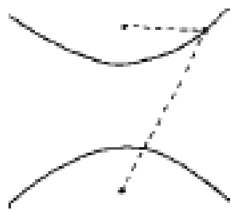
Punta una lampadina verso il muro.
Riesci a vedere i tre tipi di sezione conica?

29

Per quanto sia gratificante, vedere le sezioni coniche da un punto di vista proiettivo, ossia vederle come visioni prospettiche diverse dello stesso cerchio, non ci dice effettivamente niente sulla geometria di queste curve. È molto bello sapere che iperboli, parabole ed ellissi sono proiettivamente equivalenti, ma restano comunque forme diverse. Come appaiono esattamente? Come, ad esempio, una parabola differisce da un'ellisse?

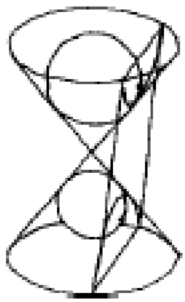
Al momento, sappiamo molto di più sulle ellissi che sulle altre coniche. Sappiamo che le ellissi sono cerchi dilatati, e sappiamo che hanno delle proprietà focali e di tangenza particolarmente piacevoli. Possiamo dire qualcosa di simile su iperboli e parabole? Ebbene, si.

In effetti, l'iperbole ha una proprietà focale molto bella. Come l'ellisse, l'iperbole ha due speciali punti focali, e quando un punto si muove lungo l'iperbole, le sue distanze da questi due punti seguono un semplice pattern.



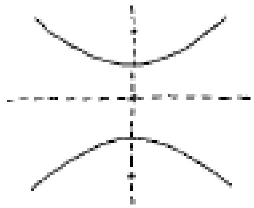
Questa volta, però, non è la somma delle distanze a restare costante, ma la *differenza*. Significa che un'iperbole è l'insieme dei punti le cui distanze da due punti fissati differiscono di una quantità fissa.

Ovviamente, un'affermazione così ardita richiede qualche sorta di dimostrazione. Dobbiamo provare che se un cono è tagliato con una certa inclinazione (in modo da ottenere un'iperbole) allora i punti della sezione trasversale devono obbedire a questa nuova proprietà focale. Come potresti aspettarti, ciò può essere fatto con sfere e tangenti alla solita maniera.



Riesci a sviluppare questa dimostrazione nel dettaglio?

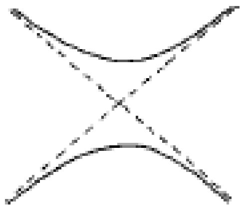
La proprietà focale ci dice un po' di cose sull'iperbole. Innanzitutto, ci dice che essa è perfettamente simmetrica.



Non solo ciascuno dei due pezzi dell'iperbole è esso stesso simmetrico, ma ognuno è l'immagine speculare dell'altro. C'è simmetria rispetto alla linea che collega i punti focali e anche rispetto alla perpendicolare.

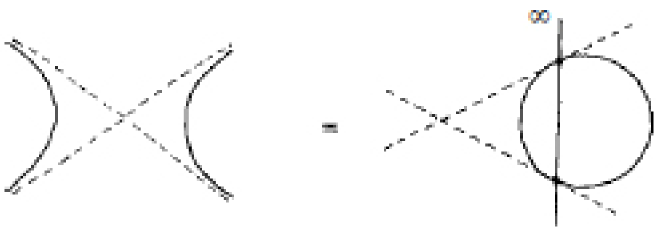
Perché le iperboli sono così simmetriche?

Un'altra bella caratteristica delle iperboli è il modo in cui sono strette così bene tra due linee secanti.

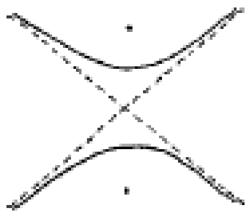


Nessuna di queste linee tocca effettivamente l'iperbole, ma viaggiando lungo l'iperbole ti avvicini sempre di più ad esse. In altre parole, sono le tangenti nei punti all'infinito dell'iperbole.

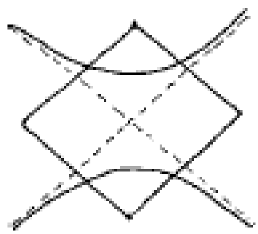
Il modo più semplice di vederlo è pensare l'iperbole come un cerchio nello spazio proiettivo che incontra la linea all'infinito in due punti. (Il che è, dopo tutto, ciò che l'iperbole è). Il cerchio quindi ha due linee tangenti in questi punti, e queste sono le linee di cui stiamo parlando.



Poiché le iperboli sono simmetriche, i punti di intersezione delle tangenti devono essere esattamente a metà strada tra i due punti focali.



C'è un legame molto bello tra queste tangenti e la proprietà focale dell'iperbole. Se tracciamo le parallele alle tangenti per i punti focali abbiamo una forma di diamante.



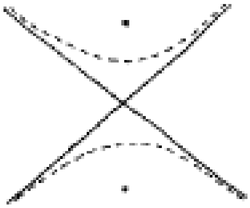
Per simmetria, i lati di questo diamante devono essere tutti uguali. Gli angoli non saranno necessariamente retti, per cui non possiamo dire che sia un quadrato, ma è comunque una bella forma di diamante. (Puoi anche chiamarla rombo se preferisci questa parola).

La proprietà focale dice che le distanze di ogni punto sull'iperbole dai punti focali hanno differenza costante. Ebbene, questa differenza costante, che chiameremo **costante focale** dell'iperbole, è esattamente uguale alla lunghezza del lato del diamante.

Perché la lunghezza focale dell'iperbole è uguale al lato del diamante?

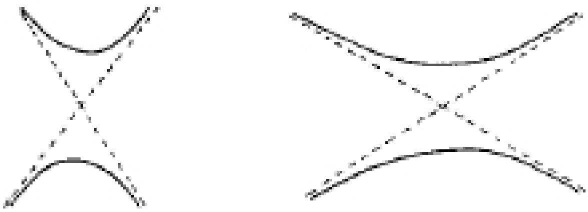
(Probabilmente il modo più semplice di scoprirlo è di immaginare un punto sull'iperbole muoversi verso l'infinito e pensare cosa succede alle linee che lo collegano ai punti focali).

Una conseguenza di ciò è che un'iperbole è completamente determinata dalle sue tangenti all'infinito (le due linee secanti) e dai suoi punti focali.

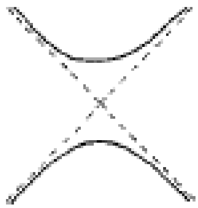


Ogni coppia di linee secanti, con una coppia di punti disposti simmetricamente, determina un'unica iperbole. La ragione è che se abbiamo le linee e i punti, possiamo costruire il diamante ed ottenere la costante focale. Questa, insieme all'ubicazione dei punti focali, determina tutti i punti dell'iperbole. Quindi, per specificare un'iperbole in particolare, è sufficiente specificare l'angolo tra le linee e la distanza tra i punti focali.

In effetti, poiché il passaggio di scala non modifica gli angoli, la forma di un'iperbole dipende solo dall'angolo tra le tangenti. Due iperboli con lo stesso angolo ma diverse distanze focali sono semplicemente versioni in scala l'una dell'altra; sono iperboli simili. Quindi le diverse forme di iperbole corrispondono ai diversi angoli possibili tra le linee tangenti.



In particolare, c'è la speciale **iperbole retta** le cui tangenti si incontrano ad angolo retto.



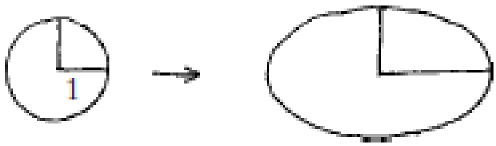
Questa forma sta alle iperboli come il cerchio sta alle ellissi; è l'oggetto standard da cui sono ottenuti tutti gli altri. Significa che ogni iperbole è una dilatazione di un'iperbole retta.

Perché ogni iperbole è una dilatazione di un'iperbole retta?

(Qui c'è una sottigliezza: cosa ci dice che la dilatazione di un'iperbole sia un'iperbole?)

Iperbole ed ellisse hanno molto in comune. Hanno proprietà focali molto simili, che coinvolgono le distanze da due punti fissi, con la sola differenza che mentre per l'ellisse questa costante focale è la somma delle distanze, per l'iperbole è la differenza. Entrambe sono classi infinite di forme che possono essere ottenute come dilatazioni di un singolo prototipo – il cerchio e l'iperbole retta.

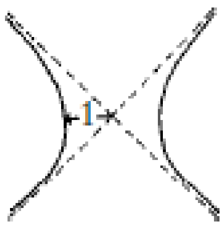
Più precisamente, una volta che abbiamo scelto un'unità di lunghezza, possiamo parlare della **circonferenza unitaria** che ha per raggio quell'unità. Quindi ogni ellisse può essere ottenuta dilatando quella circonferenza due volte – di un certo fattore in una direzione e di un altro nella direzione perpendicolare.



In questo modo possiamo pensare che un'ellisse abbia un **raggio lungo** e un **raggio corto**. L'ellisse è dunque completamente determinata da queste due lunghezze.

Se un'ellisse ha raggio lungo *a* e raggio corto *b*, dove sono i suoi punti focali?

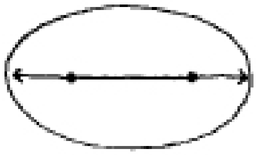
Analogamente, possiamo pensare ad un'**iperbole unitaria**. Sarà un'iperbole retta in cui la distanza dal vertice al centro è esattamente un'unità.

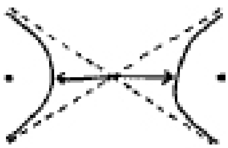


Ogni iperbole viene quindi ad essere una dilatazione (di due fattori, in due direzioni) di questa.

Dove sono i punti focali di un'iperbole unitaria?
Che succede se dilatiamo dei fattori *a* e *b*?

Un'altra analogia interessante tra ellisse e iperbole è il modo in cui la costante focale si interpreta geometricamente.



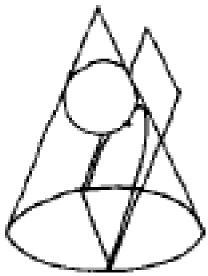


Mostra che la costante focale di un'ellisse o di un'iperbole è uguale al suo diametro.

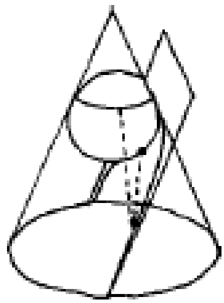
Accade anche che ellisse ed iperbole abbiano simili proprietà di tangenza. Per l'ellisse è l'effetto "tavolo da biliardo". Qual è per l'iperbole?

Riesci a scoprire la proprietà della tangente in un'iperbole?

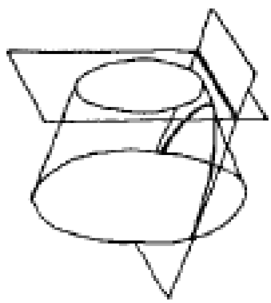
Per la parabola, invece, è tutta un'altra storia. Ha una proprietà focale, ma è molto diversa da quelle di ellisse e iperbole. Invece di due punti focali, la parabola ne ha uno solo. Quando tagliamo un cono con la stessa inclinazione del cono stesso, creiamo un solo compartimento in grado di ospitare una sfera nel modo giusto.



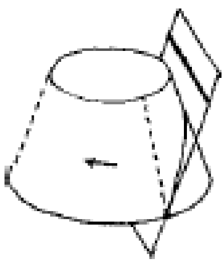
Significa che c'è una sola sfera che è simultaneamente tangente al cono e al piano secante. Al solito, il punto focale della parabola è quello in cui questa sfera tocca il piano. La distanza di un punto sulla parabola dal punto focale è quindi la stessa della distanza sul cono del punto dalla sfera. In altre parole, è la stessa della distanza dal cerchio in cui la sfera incontra il cono.



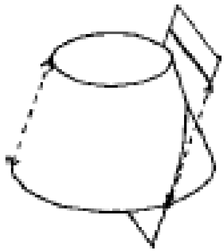
Nel caso di ellisse ed iperbole, avevamo un'altra distanza focale con cui potevamo comparare questa. Qui non abbiamo niente. Come facciamo a capire il significato geometrico di questa lunghezza? Penso che il modo migliore consista nel tagliare il cono due volte orizzontalmente, all'altezza del cerchio e del punto scelto, ottenendo una specie di paralume.



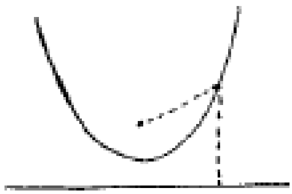
Ciò elimina i residui di cono superflui. Osserva che il piano passante per il cerchio interseca il piano secante il cono in una certa linea. Questa linea sarà la chiave del problema. La cosa importante è che dipende solo dalla parabola, non dal punto che abbiamo scelto.



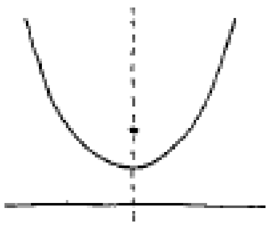
Ed ora, ecco la bella osservazione. La lunghezza che ci interessa (la distanza dal nostro punto al punto focale) è uguale alla distanza lungo il paralume tra i due piani orizzontali. Possiamo spostare questo segmento ruotandolo intorno al paralume, senza modificarne la lunghezza. In particolare possiamo ruotarlo finché non si trovi perfettamente di fronte al piano secante.



Adesso è facile valutarne la lunghezza – è la distanza del nostro punto dalla linea speciale. Che bello! Quindi, nelle parabole, non solo c'è un punto focale ma c'è anche una **linea focale**, e i punti sulla parabola obbediscono al bel pattern di essere equidistanti da entrambi.



Questa proprietà focale della parabola ha molte conseguenze interessanti. Innanzitutto, significa che le parabole devono essere simmetriche (non che ciò sia una grossa sorpresa).

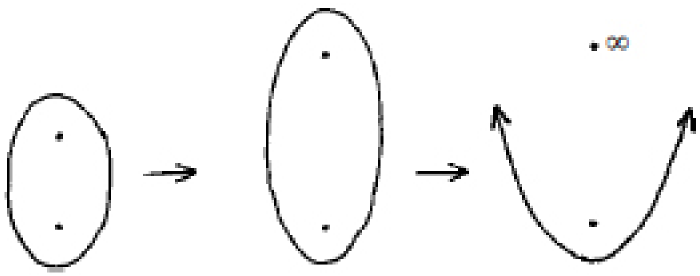


Poiché una parabola è completamente determinata da un punto e da una linea, è solo la distanza tra essi a rendere una parabola diversa dall'altra.

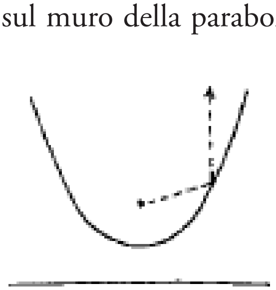
Ciò significa che due parabole sono sempre una la visione in scala dell'altra. In altre parole, tutte le parabole sono simili. Esiste un'unica forma parabolica. Ci sono molte ellissi e iperboli più o meno allungate, ma c'è solo una parabola. Ciò la rende molto speciale.

Cosa accade dilatando una parabola?

Un bel modo di pensare alle parabole è vederle come *ellissi infinite*: hai una parabola quando fissi un punto focale dell'ellisse e mandi l'altro all'infinito.

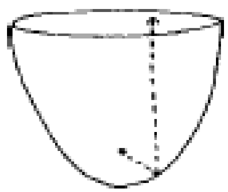


(Allo stesso modo potremmo vederle anche come iperboli infinite). In un certo senso, le parabole stanno al confine tra ellissi ed iperboli. Ne consegue la proprietà di tangenza della parabola: se effettuiamo un lancio dal punto focale, questo rimbalzerà sul muro della parabola e rimbalzerà dritto verso l'infinito.



Riesci a provare questa proprietà della tangente, senza nessuna "stregoneria infinita"?

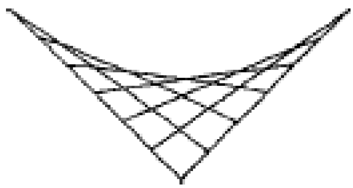
Forse ancor più bella, la superficie ottenuta dalla rotazione di una parabola, generalmente chiamata **paraboloide**, ha la stessa proprietà della tangente in ogni direzione.



Ciò ha molte applicazioni pratiche interessanti. Innanzitutto, significa che se costruiamo uno specchio parabolico (uno specchio a forma di paraboloide) e piazziamo una lampadina nel punto focale, tutta la radiazione sarà mandata fuori, senza alcuna dispersione di energia. È proprio così che sono progettate le torce e i fari delle automobili. Usato al contrario, uno specchio parabolico è anche un tremendo forno solare. Tutta la luce solare che entra nello specchio è focalizzata in un singolo punto. (È questa la ragione per cui lo chiamiamo punto focale). Le sezioni coniche sono buone lenti; deviano la luce in una maniera molto interessante ed utile.

Se mi sono attardato così a lungo sull'argomento delle sezioni coniche, è perché sono così belle ed hanno così tante proprietà interessanti che non resisto alla voglia di parlartene. L'altra ragione è che è *possibile* parlartene. Non è così facile parlare di curve, e le coniche sono relativamente semplici rispetto alle altre.

Voglio sottolineare una cosa. Queste sezioni coniche sono curve molto particolari e specifiche – non tutti gli oggetti a forma di scodella sono un'iperbole o una parabola. Molte curve non hanno niente di simile ad una proprietà focale o di tangenza. Queste cose sono molto speciali, e dovremmo saperle apprezzare!

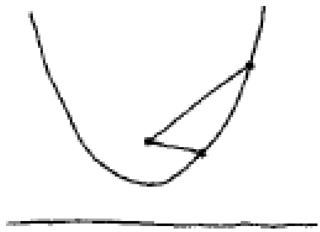


Se unisci le linee in questa struttura a spazi uguali, appare una parabola. Perché?

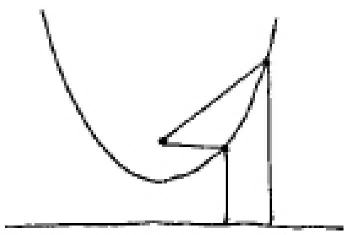
Un'ultima parola sulle coniche e sulla loro misurazione. Abbiamo già discusso la situazione dell'ellisse. Poiché un'ellisse è semplicemente un cerchio dilatato, la sua area è facile da misurare. Per la stessa ragione, il suo perimetro non lo è. Per essere precisi, se abbiamo un'ellisse con raggi lungo e corto rispettivamente a e b, la sua area sarà semplicemente πab. Capisci perché? Il perimetro d'altra parte, dipende da a e b in maniera trascendente. Non c'è una formula, nel senso di una descrizione algebrica finita.

Sfortunatamente, è una situazione comune; lo stesso è vero per iperbole e parabola. Certo, queste curve sono infinite, quindi non potremmo neppure parlare di un loro perimetro in quanto tale. Ma anche se le tagliamo da qualche parte, le loro lunghezze non sono algebricamente descrivibili. Non che non siano assai interessanti. In effetti, torneremo sull'argomento delle lunghezze di sezioni coniche un po' più tardi, quando possederemo qualche tecnica di misurazione più potente.

C'è una misura che siamo in condizione di eseguire, ed è quella dell'area di un *settore parabolico*.

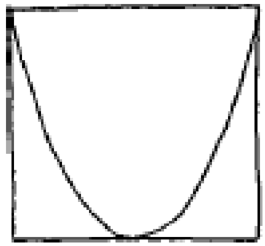


Si tratta di quella regione contenuta tra due linee condotte dal punto focale alla curva stessa. Il modo migliore di misurare quest'area consiste nel confrontarla con il *rettangolo parabolico* ottenuto tracciando le perpendicolari alla linea focale.



Usando il metodo di esaustione, Archimede fu in grado di mostrare che l'area del settore è esattamente metà di quella del rettangolo. Riesci a fare lo stesso?

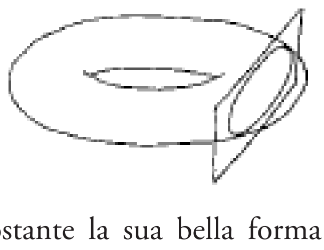
Perché l'area di un settore parabolico è uguale a metà dell'area del rettangolo parabolico?



Mostra che la sezione parabolica occupa esattamente due terzi della scatola che la contiene.

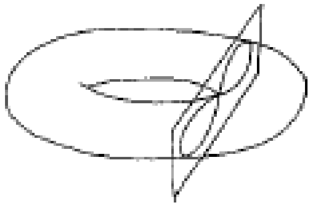
30

Quale putiferio abbiamo scatenato con la semplice azione di sezionare un cono! Se una forma così semplice ha sezioni trasversali così interessanti, cosa accadrà sezionando qualcosa di più complicato? Quale sorta di curve otteniamo sezionando, poniamo, una ciambella?



Questa curva, nonostante la sua bella forma ovale, *non* risulta essere un'ellisse. Non ha le giuste proprietà focali e di tangenza, e non è la dilatazione di alcunché; è un tipo di curva completamente nuovo che non abbiamo mai visto prima. Immagino che potremmo chiamarla **sezione torica** se vogliamo.

Se spostiamo ancora un po' il piano secante, in modo che tocchi il cerchio interno del toro, abbiamo una sezione trasversale ancora più esotica.



Certamente, questa non è una vecchia figura qualunque a forma di otto ma è un tipo ben preciso di curva con un pattern ben preciso – quello che si ottiene tagliando una ciambella. È un oggetto geometrico piuttosto sofisticato. Quale sorta di proprietà potrebbe avere questa curva? Come potremmo mai misurare un oggetto simile?

Poco fa parlavo del problema della descrizione. Le sole figure di cui possiamo parlare sono quelle che hanno un pattern descrivibile. Il lavoro del geometra è di trasformare in qualche modo queste informazioni sulla struttura in informazioni sulla misura. Ovviamente, ciò sarà molto più facile da fare quando il pattern è semplice. Più sono elaborate le nostre descrizioni, più è difficile dire qualcosa sulle forme che descrivono.

La triste verità è che le misure sono quasi sempre impossibili. Abbiamo qualche speranza di misurare solo gli oggetti più semplici. E anche in quei casi non è una passeggiata. Ricordi quanta abilità c'è servita per misurare la sfera? Che speranze abbiamo con una forma dalla descrizione tutta contorta?

Voglio dire che, oltre ad un problema di descrizione, ne abbiamo uno di complessità. Non solo le nostre forme devono avere un pattern, devono avere un pattern semplice. Il problema è che l'unica strada per misurare forme curve è il metodo di esaustione ma, quando il pattern è troppo complicato, diventa subito inutilizzabile.

La situazione ha un che di ironico. Prima temevamo di non riuscire a descrivere alcuna forma nuova. Adesso abbiamo molte strade per farlo. Per esempio, potremmo partire da una di queste sezioni toriche a forma di otto, ruotarla nello spazio per formare una superficie, e prenderne una sezione trasversale.

Solo Dio sa che razza di curva è *questa*! Certamente non è un'ellisse. No, il nostro problema non è certo la mancanza di nuove strutture. In effetti abbiamo sviluppato un discreto arsenale di mezzi descrittivi: possiamo dilatare e proiettare, sezionare, fare costruzioni alla Pappo, ed applicare una o più di queste operazioni in sequenza. Siamo nella condizione di poter creare oggetti matematici davvero da incubo, ma non abbiamo *nessuna speranza* di riuscire a misurarli.

E sai una cosa? Non me ne importa. Man mano che le nostre descrizioni diventano più elaborate, non solo le misure diventano sempre più difficili, ma io divento sempre meno interessato. Non mi importa proprio niente delle sezioni trasversali della rotazione di una sezione torica. Per me, fare matematica serve a vedere qualcosa di bello, non a creare un mucchio di strutture sempre più arzigogolate solo perché possiamo farlo.

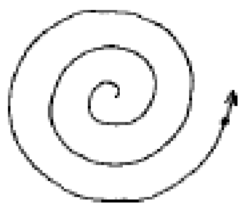
Dunque, è rimasta qualche forma bella? In effetti, c'è. Un esempio particolarmente bello è l'**elica**.

Questa si che è il tipo di forma semplice ed elegante di cui stavo parlando! Mi piacerebbe pensare a qualcosa di bello come questo. Certamente, prima di farlo, ci serve qualche sorta di descrizione precisa. Cos'è esattamente un'elica?

Il modo che preferisco per figurarmela è quello di immaginare un disco circolare nello spazio, supponiamolo poggiato orizzontalmente, con evidenziato un punto particolare sul bordo. Se ruotiamo il disco, e contemporaneamente lo alziamo verso l'alto, il punto speciale traccia un'elica perfetta.

In verità, c'è un'interessante sottigliezza. Per dar vita ad un'elica veramente bella, rotazione e innalzamento devono essere fatti a *velocità costante*. Se velocizziamo o rallentiamo, l'elica verrà allungata e schiacciata in maniera più brutta (e fastidiosamente familiare).

Ciò significa che la nostra descrizione di un'elica (supposto che ne vogliamo una che risulti piacevole) dipende non solo dal fatto che il cerchio si muova ma dal *modo* in cui si muove.

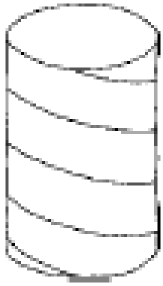


Come possiamo guardare ad una spirale come risultato di un moto?

Ci sono molti tipi diversi di elica che, ovviamente, dipendono dal rapporto tra la velocità con cui il cerchio si alza e quella con cui ruota.

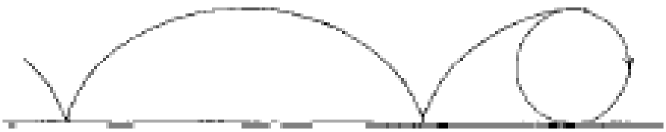
Un modo semplice di determinare una particolare forma d'elica è quello di specificare il raggio del cerchio e l'incremento di altezza del punto dopo una rotazione completa.

A volte è utile immaginare che l'elica giaccia sulla superficie di un cilindro, tipo insegna del barbiere. L'elica può allora essere descritta in termini di dimensione e forma del cilindro e numero di giri completi fatti.



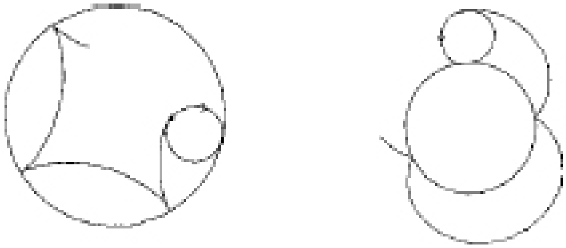
Come possiamo misurare la lunghezza di un'elica?

Un'elica è un esempio di ciò che chiamiamo **curve meccaniche**; ossia, curve descritte dal cammino di un punto su un oggetto mobile. Una tra le curve meccaniche più belle e affascinanti è la **cicloide**; la curva tracciata da un punto su una circonferenza rotante.



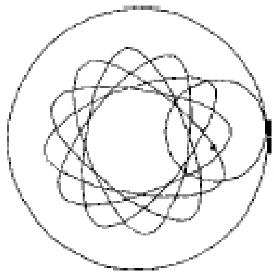
È una forma completamente nuova, diversa da tutto ciò che abbiamo visto prima. Ha anche un numero straordinario di proprietà interessanti; se ci fosse stato un premio di “curva più interessante del XVII secolo”, la cicloide avrebbe stravinto.

Ci sono molte variazioni interessanti su quest'idea della cicloide. Una è quella di una circonferenza che ruota dentro un’altra circonferenza. Essa forma una cosiddetta **ipocicloide**. Ovviamente, può anche ruotare all'esterno, creando un'**epicicloide**.



In che modo il numero di cuspidi di un'ipocicloide dipende dai raggi dei due cerchi? E quello di un'epicicloide?

Un'altra idea è quella di prendere il punto tracciante all'interno del disco. Nel caso dell'ipocicloide, ciò produce le bellissime curve a **spirografo**.



Che succede se il punto tracciante è al centro?

Il bello di qualcosa come una cicloide o uno spirografo è che sono naturali e accattivanti strutture che risultano semplici, attraenti e soddisfacenti. Non sono delle contorte sezioni trasversali di qualche strana rotazione della proiezione di una fetta di chissà cosa. Per ragioni sia estetiche che pratiche, queste curve sono interessanti e domandano di essere misurate e capite. Ovviamente, il solo modo per capire una curva meccanica come una cicloide è di capire il movimento che la genera. Il che ci pone in una situazione completamente nuova. Finora ci siamo interessati di forme e strutture statiche, ferme davanti ai nostri occhi. Adesso, stiamo parlando di qualcosa che si muove. Dobbiamo spostare la nostra attenzione, dagli oggetti ai *movimenti*.

Riesci a immaginare il modo di descrivere un'elica su un toro?

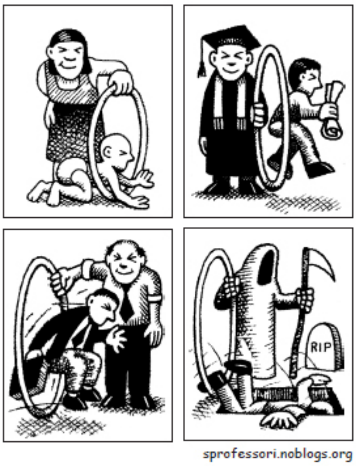
Una scala scivola su una parete fino a cadere a terra.
Che curva descrive il suo punto medio?

Sprofessori

critica alla scuola e iniziativa antiautoritaria

Il progetto "Sprofessori" nasce dalla volontà di attaccare quella visione dell'insegnamento come rapporto professionale, che è propria tanto della discussa riforma scolastica quanto di chi vi si oppone. L'idea dell'insegnamento come rapporto umano, e di ogni rapporto umano come una forma di apprendimento, ci porta invece a considerare la miseria morale e materiale che circonda non solo la scuola, ma tutto il sistema sociale in cui viviamo. Un sistema sociale in cui noi adulti siamo poco o nulla coscienti di ciò che mangiamo, utilizziamo, acquistiamo e produciamo. La scuola non ha fornito questa consapevolezza ai tanti di noi che l'hanno frequentata fino ed oltre la laurea; non la fornirà ai nostri figli e ai nostri alunni che ci ostiniamo a rinchiudervi dentro.

La nostra volontà di avviare un dibattito su questo tema è finalizzata alla creazione di momenti di incontro (o eventualmente di scontro) per individuare possibili compagni di idee, con cui avviare percorsi comuni di azione e di lotta. Ci proponiamo di rieditare testi e raccogliere materiali che evidenzino gli argomenti tanto di chi si oppone all'esistenza in sè stessa della scuola e all'inferenza del mondo adulto sulle menti dei giovani, quanto quelli di chi ha avviato esperienze educative di tipo antiautoritario.



Stampato a Gennaio 2016